Université de Montpellier, Faculté des Sciences

Licence 2 - HAC310X Mathématiques pour la Chimie

CORRIGÉ
EXAMEN FINAL-Session 2
(10/06/2024)

Problème 1 [4,5 points].

(a) [0,5 + 0,5 point] A inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$, c'est-à-dire

$$det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \neq 0, \text{ si est seulement si } a \neq 0.$$

On peut trouver que

$$A^{-1} = -\frac{1}{a} \begin{pmatrix} b & -1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

(b) [0,5 point] A est orthogonale si et seulement si $AA^t = Id$, c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, A est orthogonale si et seulement si $b = 0$ et $a^2 + b^2 = 1$ ou encore si et seulement si $b = 0$ et $a = \pm 1$.

(c) [1 point]

$$det(A - \lambda I) = 0 \iff det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ a & b-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - b\lambda - a = 0.$$

A admet deux valeurs propres distinctes si et seulement si le discriminant $\Delta = b^2 + 4a \neq 0$.

(d) [2 points] Si α est une valeur propre donc il doit vérifier l'équation $\lambda^2 - b\lambda - a = 0$, c'est-à-dire $\alpha^2 - b\alpha = a$ ou encore $\alpha^2 = b\alpha + a$. Vérifions donc que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ est un vecteur propre, c'est-à-dire,

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ a + \alpha b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha v_1.$$

On procède similairement pour le valeur propre β.

Problème 2 [3,5 points].

(a) [0,5+0,5 points]

$$\frac{3+6i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{9+12i+18i-24}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i.$$

$$(5+5i)^2 = (5+5i)(5+5i) = 25 + 25i + 25i + 25i^2 = 25 + 50i - 25 = 50i.$$

(b) [1,5 points] Soit $w = x + iy$. Nous cherchons les solutions à $w^2 = (x+iy)^2 = 8 - 6i$. Ce qui implique que $x^2 + i2xy - y^2 = 8 - 6i$. Ceci nous ramène à $x^2 - y^2 = 8$ et $2xy = -6$. En plus, on sait que $|w^2| = |8 - 6i|$ obtenant $x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. En combinant cette dernière égalité avec $x^2 - y^2 = 8$ on obtient $2x^2 = 18$ ou encore $x^2 = 9$ impliquant $x = \pm 3$ et on en déduit $y = \pm 1$. Comme $2xy = -6 < 0$ alors x et y ont signe différent. Ainsi, les racines carrées sont $z_1 = 3 - i$ et $z_2 = -3 + i$.

(c) [1 point] Les solutions d'une équation de degré deux sont données par : $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dans notre cas $\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{8} \pm \sqrt{8 - 4\frac{3}{2}i}}{2} = \frac{-\sqrt{8} \pm \sqrt{8 - 6i}}{2}$. D'après (b) les racines carrés de $8 - 6i$ sont $3 - i$ et $-3 + i$. Donc les solutions sont

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{8}}{2} + \frac{3-i}{2} = \frac{\sqrt{8}+3}{2} - \frac{1}{2}i \text{ et } \lambda_2 = \frac{\sqrt{8}}{2} + \frac{-3+i}{2} = \frac{\sqrt{8}-3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Problème 3 [3,5 points]. (a) [1 point] $f(x,y) = x^2 + 4x + 4 + y^2 = (x+2)^2 + y^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

A partir de $2x + 4 = 0$ et $2y = 0$ nous obtenons la solution $(-2, 0)$.
Maintenant,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

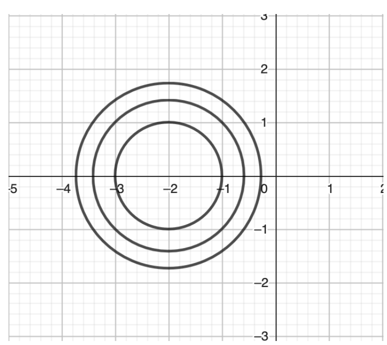
Nous avons

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 = (2)(2) - (0)^2 = 4 > 0$$

Alors, le point critique $(-2, 0)$ et soit un minimum ou bien un maximum. Or $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 > 0$, donc $(-2, 0)$ est un minimum.

(b) [0,5 point] Nous avons $f(0,0) = 4$ donc $(0,0,0)$ n'appartient à S_f.

(c) [1 point] Ensemble des cercles de la forme $(x+2)^2 + y^2 = k$ avec $k = 1, 2, 3$.



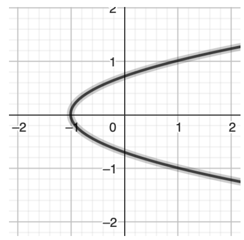
(d) [1 point] S_f correspond à la représentation (b) car les courbes de niveau induisent cette représentation et elle admet un minimum.

Problème 4 [3,5 points].

(a) [0,5 + 0,5 point] Le domaine de définition de w est $\mathbb{R}^2$ qui est bien étoilée.

(b) [1 point] Nous avons $w = F(x,y)dx + G(x,y)dy = y^2dx + x^2dy$. Alors, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial G}{\partial x} = 2x$ donc w n'est pas fermée et donc w n'est pas exacte.

(c) [0,5 point]



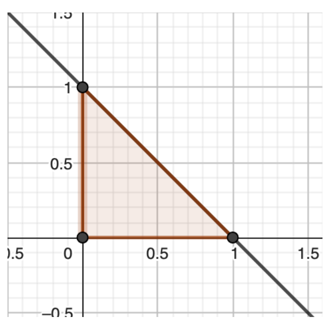
(d) [0,5 point] On considére la paramétrisation $y = t$ et $x = 2t^2 - 1$ avec $t \in [1;0]$. Alors $dy = dt$ et $dx = 4tdt$,

(e) [0,5 point]

$$\begin{aligned}\int_C y^2dx + x^2dy &= \int_1^0 t^2(4tdt) + (2t^2-1)^2dt \\ &= \int_1^0 \left(4t^3 + 4t^4 - 4t^2 + 1\right) dt \\ &= \left[\tfrac{4}{5}t^5 + t^4 - \tfrac{4}{3}t^3 + t\right]_1^0 = -\tfrac{22}{15}.\end{aligned}$$

Problème 5 [2 points].

(a) [0,5 point]



(b) [1,5 points]

$$\begin{aligned}\int_D (x+y)e^{-y}dydx &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x}(x+y)e^{-y}dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[e^{-y}(-x-y-1)\right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 (-2e^{x-1} + x + 1)dx \\ &= \left[-2e^{x-1} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 \\ &= -2 + \tfrac{1}{2} + 1 - (-\tfrac{2}{e}) \\ &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{e}.\end{aligned}$$

Problème 6 [3 points].

[1 point] L'équation homogène est $y'(t) - y(t) = 0$ ou encore $y'(t) = y(t)$ dont les solutions sont :

$$y(t) = Ce^{\int dt} = Ce^t, \quad C \in \mathbb{R}$$

[1 point] On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = C(t)e^t$$

On a $y_0'(t) - y_0(t) = e^t$ alors $C(t)e^t + e^t C'(t) - C(t)e^t = e^t$ d'où $C'(t) = 1$. En intégrant par rapport à t nous obtenons

$$C(t) = t + K, K \in \mathbb{R}$$

En posant $K = 0$, nous avons $y_0(t) = te^t$.

[1 point] On a qu'une solution générale est

$$y(t) = te^t + Ce^t$$

En utilisant que pour $t = 0$ on a $y = 1$ alors $1 = -0e^0 + Ce^0$ obtenant $C = 1$. Donc, la solution générale est

$$y(t) = te^t + e^t.$$