L2 Mathématiques — Université de Montpellier
HAX403X Analyse 4 — Année universitaire 2023-2024

Correction de l'examen de session 1 du 16/05/24

Exercice 1 (9 points)

On considère la série de fonctions

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2},\qquad x\in\mathbb{R}.$$

1. Est-ce que la convergence est normale sur $\mathbb{R}$?

   Posons $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}, x\in\mathbb{R}$. Alors $f_n'(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. On voit alors que $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|=f_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{2n}$. On constate que la série $\sum\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|$ diverge. Donc la convergence de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ n'est pas normale sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la convergence est uniforme sur les compacts de $]0,+\infty[$.

   Soit $[a,b]\subset]0,+\infty[$. Alors $0\le f_n(x)\le\frac{b}{1+n^2a^2}$, $\forall x\in[a,b]$. Comme la série numérique $\sum\frac{b}{1+n^2a^2}$ converge, on a montré que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$.

3. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0\}$.

   On a déjà vu que la série $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ converge sur $\mathbb{R}-\{0\}$. Pour montrer que F est C^1, il suffit de montrer que la série des dérivées $\sum f_n'(x)$ converge uniformément sur les compacts de $]0,+\infty[$. Soit $[a,b]\subset]0,+\infty[$. Alors

   $$|f_n'(x)|=\frac{|1-n^2x^2|}{(1+n^2x^2)^2}\le\frac{1}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{1+n^2a^2},\qquad\forall x\in[a,b].$$

   Comme la série numérique $\sum\frac{1}{1+n^2a^2}$ converge, on a montré que la série de fonction $\sum f_n'(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$.

4. Justifier le fait que pour tout $x\neq0$ et tout $n\ge1$, on a l'encadrement

   $$\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{1+t^2x^2}\ge\frac{1}{1+n^2x^2}\ge\int_{n}^{n+1}\frac{dt}{1+t^2x^2}.\qquad(1)$$

   Pour tout $x\neq0$ la fonction $t\ge0\mapsto\frac{1}{1+t^2x^2}$ est décroissante. Ainsi $\frac{1}{1+t^2x^2}\ge\frac{1}{1+n^2x^2}$ $\forall t\in[n-1,n]$, et en intégrant cette relation sur $[n-1,n]$, on obtient

   $$\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{1+t^2x^2}\ge\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{1+n^2x^2}=\frac{1}{1+n^2x^2}.$$

   L'autre inégalité s'obtient de la même façon.

5. Déduire de (1) un encadrement de $F(x)$ pour tout $x > 0$, ainsi que la limite $\lim_{x\to 0^+} F(x)$.

En sommant la relation (1) pour n entre 1 et N, on obtient

$$\int_0^N \frac{dt}{1+t^2x^2} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+n^2x^2} \geq \int_1^{N+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} = \int_0^{N+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2x^2}$$

En passant à la limite $N \to +\infty$, on obtient

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2x^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2x^2}, \qquad \forall x \neq 0.$$

Cela donne un encadrement de $F(x)$ pour tout $x > 0$:

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} - F(x) \leq \int_0^x \frac{dt}{1+s^2}.$$

Ici on se sert du fait que $x\int_0^b \frac{dt}{1+t^2x^2} = \int_0^{xb} \frac{ds}{1+s^2}$ pour tout $b, x > 0$. On montre ainsi que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2}$.

6. Calculer $\int_a^1 F(x)dx$ pour tout $a \in]0,1]$. En déduire que

$$\int_0^1 F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n^2}.$$

Soit $a \in]0,1]$. Comme la série de fonctions $F(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ converge uniformément sur $[a,1]$, on a

$$\int_a^1 F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^1 \frac{x}{1+n^2x^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+a^2n^2)}{2n^2}$$

Considérons la fonction $G(a) := \sum_{n=1}^\infty \frac{\ln(1+a^2n^2)}{2n^2}$ pour $a \in [0,1]$. On a l'encadrement $0 \leq \frac{\ln(1+a^2n^2)}{2n^2} \leq \frac{\ln(1+n^2)}{2n^2}$ pour tout $a \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$. Comme la série numérique $\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln(1+n^2)}{2n^2}$ est convergente, on sait que la série $G(a) := \sum_{n=1}^\infty \frac{\ln(1+a^2n^2)}{2n^2}$ admet une convergence uniforme sur $[0,1]$. Cela implique que la fonction G est continue, ainsi $\lim_{a\to 0^+} G(a) = G(0) = 0$.

On a finalement montré que $\int_0^1 F(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{\ln(1+n^2)}{2n^2}$.

7. Donner un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Pour $x > 0$, nous avons

$$0 \leq \frac{1}{n^2x} - \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{(1+n^2x^2)n^2x} \leq \frac{1}{n^4x^3}, \qquad \forall n \geq 1.$$

En sommant ces inégalités on obtient

$$0 \leq \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - F(x) \leq \frac{1}{x^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \qquad \forall x > 0.$$

On obtient le DL asymptotique en $+\infty$: $F(x) = \frac{\alpha}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ avec $\alpha = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$. Cela montre que $F(x) \sim \frac{\alpha}{x}$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 2 (5 points)

Soient $\alpha \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par[1] $f(x) = \mathrm{ch}(\alpha\, x)$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)e^{\alpha t}dt = (-1)^n \frac{2\alpha\, \mathrm{sh}(\alpha\, \pi)}{\alpha^2 + n^2}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On calcule tout d'abord

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{(in+\alpha)t}dt = \left[\frac{1}{in+\alpha}e^{(in+\alpha)t}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n}{in+\alpha}\left(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right) = \frac{(-1)^n\left(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right)}{n^2+\alpha^2}\left(-in+\alpha\right).$$

En prenant la partie réelle de la dernière relation, on obtient l'égalité souhaitée.

2. Calculer les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \geq 1$.

Comme la fonction f est paire, les coefficients $b_n(f)$ sont nuls. D'autre part

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\mathrm{ch}(\alpha\, t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)e^{\alpha t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)e^{-\alpha t}dt.$$

On obtient finalement $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)e^{\alpha t}dt = (-1)^n\frac{2\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha\,\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)}$.

3. En déduire la valeur des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2+n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}.$$

La fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et C^1 par morceaux. Le théorème de Dirichlet nous permet de voir que

$$f(x) = c_0(f) + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

avec $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}(\alpha\, t)dt = \frac{\mathrm{sh}(\alpha\,\pi)}{\alpha\,\pi}$.

Prenons $x = 0$. La relation précédente donne

$$1 = \frac{\mathrm{sh}(\alpha\,\pi)}{\alpha\,\pi} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha\,\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)}.$$

On obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2} = \frac{\pi}{2\alpha}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha\,\pi)} - \frac{1}{\alpha\,\pi}\right).$$

De la même façon, en prenant $x = \pi$, on obtient

$$\mathrm{ch}(\alpha\,\pi) = \frac{\mathrm{sh}(\alpha\,\pi)}{\alpha\,\pi} + \sum_{n\geq 1}\frac{2\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha\,\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)}.$$

1. $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

et cela donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2+n^2} = \frac{\pi}{2\alpha}\left(\coth(\alpha\,\pi) - \frac{1}{\alpha\,\pi}\right)$.

Pour calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}$, on utilise la formule de Parseval

$$c_0(f)^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 1} a_n(f)^2 = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt.$$

lorsque $\alpha = 1$. Cela donne

$$\left(\frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi}\right)^2 \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{sh}(2\pi)}{4\pi}$$

On obtient finalement

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2\mathrm{sh}(\pi)^2} + \frac{\pi\mathrm{sh}(2\pi)}{4\mathrm{sh}(\pi)^2} - 1\right).$$

Exercice 3 (6 points)

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$. Quel est le lien entre les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n(a_n)^2 x^n$?

   Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est

   $$R = \sup\{r \geq 0, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

   On sait aussi que $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$. Notons R' le rayon de convergence de la série entière $\sum n(a_n)^2 x^n$: alors $\frac{1}{R'} = \limsup |n(a_n)^2|^{1/n}$. Comme $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, on a $\limsup |n(a_n)^2|^{1/n} = \left(\limsup |a_n|^{1/n}\right)^2$. Cela permet de voir que $R' = R^2$.

2. Développer en série entière en 0 la fonction $G(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$.

   On a

   $$G'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}.$$

   Nous avons les DL en séries entières $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ pour $|x| < 1$ et

   $$\frac{1}{x+2} = \frac{1/2}{1+x/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}}, \qquad \forall |x| < 2.$$

   Ainsi pour $|x| < 1$, on a la relation $G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1\right)x^n$. En intégrant on obtient

   $$G(x) = \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \forall |x| < 1.$$

3. Soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $\forall n \geq 2$.

(a) Montrer que $|u_n| \leq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En déduire que la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ converge sur l'intervalle $]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$.

La relation $|u_n| \leq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se montre au moyen d'une récurrence élémentaire. Ensuite, cette même relation montre que la suite $(u_n x^n)$ est bornée si $|x| \leq \frac{1}{2}$, donc que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ est supérieur à $\frac{1}{2}$. Ainsi $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ converge sur l'intervalle $]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$.

(b) Exprimer la somme $S(x)$, pour $x \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$, comme le quotient de deux fonctions polynomiales.

Pour $x \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$, on a

$$\begin{aligned}
S(x) &= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+2} x^{n+2} \\
&= 1 + x + \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \right) x^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} x^{n+1} \right) x \\
&= 1 + x + x^2 S(x) + x(S(x) - 1) \\
&= 1 + (x^2 + x) S(x).
\end{aligned}$$

On voit ainsi que $S(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$, $\forall x \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$.