L2 Mathématiques
HAX403X Analyse 4

Université de Montpellier
Année universitaire 2023-2024

Examen, session 1
Jeudi 16 mai 2024

Documents et appareils électroniques sont interdits et doivent être rangés.

La notation tiendra compte de la précision de vos arguments.

Toute assertion doit être justifiée, les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être vérifiées.

Exercice 1 (9 points)

On considère la série de fonctions

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1. Est-ce que la convergence est normale sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la convergence est uniforme sur les compacts de $]0, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0\}$.
4. Justifier le fait que pour tout $x \neq 0$ et tout $n \geq 1$, on a l'encadrement
$$\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{1+t^2x^2} \geq \frac{1}{1+n^2x^2} \geq \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{1+t^2x^2}. \tag{1}$$
5. Déduire de (1) un encadrement de $F(x)$ pour tout $x > 0$, ainsi que la limite $\lim_{x\to 0^+} F(x)$.
6. Calculer $\int_a^1 F(x)dx$ pour tout $a \in]0, 1]$. En déduire que
$$\int_0^1 F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n^2}.$$
7. Donner un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2 (5 points)

Soient $\alpha \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par[1] $f(x) = \mathrm{ch}(\alpha\, x)$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) e^{\alpha t} dt = (-1)^n \frac{2\alpha\, \mathrm{sh}(\alpha\, \pi)}{\alpha^2 + n^2}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2. Calculer les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \geq 1$.

3. En déduire la valeur des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + n^2)^2}.$$

Exercice 3 (6 points)

Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$. Quel est le lien entre les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n(a_n)^2 x^n$?

2. Développer en série entière en 0 la fonction $G(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$.

3. Soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ \forall n \geq 2$.

   (a) Montrer que $|u_n| \leq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En déduire que la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ converge sur l'intervalle $]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$.

   (b) Exprimer la somme $S(x)$, pour $x \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$, comme le quotient de deux fonctions polynomiales.

1. $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$