E1 $\boxed{1P/\text{question}}$

1. $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$

2. $(HX)^\dagger = X^\dagger H^\dagger = XH \neq HX$ car $[H,X] = \frac{1}{2m}[P^2,X] = \frac{P}{m}[P,X] = -i\hbar\frac{P}{m} \neq 0$ ⇒ pas herm.
$(HP)^\dagger = P^\dagger H^\dagger = PH = HP$ car H ne dépend que de P ⇒ hermitien

3. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_E(x) = E\psi_E(x) \Rightarrow \psi_E(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

4. $Ae^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\,x}$ est état propre (généralisé) de P avec valeur propre $\sqrt{2mE}$
$Be^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\,x}$ — " — $-\sqrt{2mE}$
} seules valeurs de mesure possibles $= \pm\sqrt{2mE}$
⇒ Probabilité(mesurer $p \in [-\sqrt{mE}, \sqrt{mE}]$) $= 0$

5. $E_0^{3D} = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad (= E_0^x + E_0^y + E_0^z = 3\hbar\omega(0+\frac{1}{2}))$
$\psi_0^{3D}(\vec{x}) \sim \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\vec{x}^2\right) \quad (= \psi_0^{1D}(x)\,\psi_0^{1D}(y)\,\psi_0^{1D}(z))$

6. base $= \{|0\ 0\ 1\rangle, \ |0\ 1\ 0\rangle, \ |1\ 0\ 0\rangle\}$ ⇒ 3× dégénéré

7. tout $|\psi_{n,l,m_l=l}\rangle$ vérifie $L_+|\psi_{n,l,l}\rangle = 0$ car $m_l = l$ est déjà maximal.
P.ex. $L_+|\psi_{211}\rangle = 0$ ⇒ $|\psi_{211}\rangle$ est vecteur propre de L_3 avec valeur propre 0.

8. $\langle\psi|L_3|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle\psi_{210}| + \langle\psi_{211}|\right)L_3\left(|\psi_{210}\rangle + |\psi_{211}\rangle\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\langle\psi_{210}|L_3|\psi_{210}\rangle}_{=0}$
$+ \frac{1}{2}\langle\psi_{211}|\underbrace{L_3|\psi_{211}\rangle}_{\hbar|\psi_{211}\rangle} + \underbrace{\frac{1}{2}\langle\psi_{210}|\underbrace{L_3|\psi_{211}\rangle}_{\hbar|\psi_{211}\rangle}}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle\psi_{211}|L_3|\psi_{210}\rangle}_{0} = \frac{\hbar}{2}$

E2

1. diagonaliser H: une valeur propre est E_2, les autres sont les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ E_1 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \underbrace{\sigma_1}_{\text{val.pr. } \pm 1}$, alors $\pm E_1$ } $\boxed{0{,}5P}$

L'état fondamental a énergie $-E_1$. $\boxed{0{,}5P}$

E2

2. $N^2\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2\right)=1 \Rightarrow N=\frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2}}$ $\boxed{0{,}5P}$

(a) $P(E=0)=0$ car 0 n'est pas valeur propre de H $\boxed{0{,}5P}$

(b) E_2 est valeur propre non dégénérée

$\Rightarrow P(E=E_2)=|\langle\psi|\psi_{E_2}\rangle|^2$ où $|\psi_{E_2}\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est l'état propre correspondant

$$\langle\psi|\psi_{E_2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2}}\begin{pmatrix}\alpha^* & \beta^* & \gamma^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{\gamma^*}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2}}$$

$$|\langle\psi|\psi_{E_2}\rangle|^2=\frac{|\gamma|^2}{|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2}$$ $\boxed{0{,}5P}$

3.
$$\begin{pmatrix}0 & E_1 & 0\\ E_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ E_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -E_2\end{pmatrix}$$

$\boxed{0{,}5P}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & E_1 & 0\\ E_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & E_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -E_2\end{pmatrix}$$

Vu que $[H,L_3]\neq 0$, H et L_3 ne sont pas simultanément diagonalisables

$\boxed{0{,}5P}$

4. L'état fondamental est $|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ car $H|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & E_1 & 0\\ E_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{0{,}5P}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-E_1\\E_1\\0\end{pmatrix}=-E_1|\psi_0\rangle$$

$$\Delta E=\langle\psi_0|W|\psi_0\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{\varepsilon}{2}$$ $\boxed{1P}$

E3

1. $L_+=L_1+iL_2$ $\quad L_-=L_1-iL_2 \Rightarrow L_1=\frac{1}{2}(L_++L_-)$ $\boxed{0{,}5P}$

$\langle L_1\rangle=\frac{1}{2}\langle L_+\rangle+\frac{1}{2}\langle L_-\rangle=0$ $\boxed{0{,}5P}$

$$\langle L_1^2\rangle=\frac{1}{4}\left(\underbrace{\langle L_+^2\rangle}_{0}+\underbrace{\langle L_-^2\rangle}_{0}+\langle L_+L_-\rangle+\langle L_-L_+\rangle\right)$$

E3

1. $\langle L_+ L_- \rangle = \hbar^2 \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \sqrt{l(l+1) - (m-1)m} = \hbar^2 \left(l(l+1) - m^2 + m \right)$

$\langle L_- L_+ \rangle = \hbar^2 \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \sqrt{l(l+1) - (m+1)m} = \hbar^2 \left(l(l+1) - m^2 - m \right)$

$\langle L_1^2 \rangle = \frac{1}{4} \hbar^2 \left[\left(l(l+1) - m^2 + m \right) + \left(l(l+1) - m^2 - m \right) \right]$

$= \frac{\hbar^2}{2} \left(l(l+1) - m^2 \right)$

$\Delta L_1 = \sqrt{\langle L_1^2 \rangle - \langle L_1 \rangle^2} = \hbar \sqrt{\frac{l(l+1) - m^2}{2}}$ $\boxed{1P}$

2. $\psi = \left(r \sin\theta (\sin\phi + \cos\phi) + 3r\cos\theta \right) f(r)$

$= r \left(\underbrace{\sin\theta \left(\frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) + \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \right) + 3\cos\theta}_{\text{combinaison linéaire de } Y_1^{-1},\, Y_1^0,\, Y_1^1} \right) f(r)$ $\boxed{1P}$

donc fonction propre de $\vec{L}^2$ avec $\underline{l=1}$ $\boxed{1P}$

E4

$T = \frac{\vec{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2$ $\qquad \psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} a_0^{-3/2} e^{-r/a_0}$

$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\pi} a_0^{-3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)}_{=2} \int_0^\infty dr\, \cancel{r^2}\, e^{-\frac{r}{a_0}} \cancel{\frac{1}{r^2}} \frac{d}{dr}\left(r^2 \underbrace{\frac{d}{dr} e^{-\frac{r}{a_0}}}_{= -\frac{1}{a_0} e^{-r/a_0}} \right)$

$= \frac{2\hbar^2}{m} a_0^{-4} \int_0^\infty dr \left(2r - \frac{r^2}{a_0} \right) e^{-\frac{2r}{a_0}}$

$= \frac{2\hbar^2}{m} a_0^{-4} \left(2\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{a_0} \cdot 2! \cdot \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{a_0^{-2}}_{= \frac{m^2 e^4}{\hbar^4}}$ $\boxed{2P}$

$= \frac{m e^4}{2\hbar^2}$ $\qquad$ et $\langle H \rangle = E_{\text{état fond.}} = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2}$ (cours)

$\Rightarrow \langle T \rangle = -\langle H \rangle$ $\boxed{1P}$