

HAI406, Contrôle continu 2, 30m

Calculatrice et documents interdits.

Exercice 1

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'application linéaire f associée à M (on précisera les espaces de départ et d'arrivée de f).
2. Résoudre le système $M \cdot X = 0$; en déduire une représentation paramétrique du noyau de f . Est-elle injective ?
3. Soit (a, b, c) un élément de \mathbb{R}^3 : résoudre le système

$$M \cdot X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

4. Montrer que l'image de f est un plan dont on déterminera une équation cartésienne; f est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
5. Soit α un réel et l'application $f_\alpha : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f_\alpha(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t, x + \alpha y - 3z + 2t, x + y - z + 2t).$$

Pour quelles valeurs de α l'application f_α est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?