UNIVERSITÉ de MONTPELLIER **Année 2021-2022**

HAI406, Contrôle continu 3, 2h

Calculette et documents interdits.

Exercice 1

Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ contient-il $Z = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 2

Donner deux matrices A et B de taille 3×3 telles que $AB \neq BA$.

Exercice 3

Soit $v_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + ay - 3z \\ x + 2y + z \\ -y + az \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel. En fonction de a, décrire image et noyau de u_a (en donner la dimension + une description paramétrique ou par des équations).

Exercice 4

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Démontrer que $A^2 - 3A + 2Id = 0$, puis que A est inversible.

Exercice 5

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(x, y, z) = (x - 2z, -2x + y, y - z).$$

1. Vérifier que les vecteurs $c_1 = (1, 0, 1)$, $c_2 = (1, -1, 0)$ et $c_3 = (0, 0, 1)$ forment une famille libre $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$; en déduire que $\mathcal{C}$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice A de α dans la base $\mathcal{E}$. Si A' est la matrice de α dans la base $\mathcal{C}$, rappeler la formule la reliant à A.
3. Expliciter la matrice A'.