HAI406, Session 2, 2h

Calculette et documents interdits.

Exercice 1

Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ contient-il $Z = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$?

Exercice 2

On définit une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$ et une seconde application linéaire ψ par sa matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'unique matrice A telle que $\varphi(X) = AX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$.
2. Expliciter les espaces de départ et arrivée de ψ, ainsi que l'image de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.
3. Montrer que ψ est surjective et non-injective.
4. Expliciter $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ lorsque c'est possible, et donner le cas échéant leurs espaces de départ, d'arrivée et leurs matrices.
5. L'application $\varphi \circ \psi$ est-elle injective ?
6. L'application $\psi \circ \varphi$ est-elle bijective ?

Exercice 3

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$$

où a est un nombre réel.

1. Sans faire de calcul, expliquer pourquoi la matrice n'est pas inversible si $a = 1$.
2. Calculer le déterminant de A. En déduire que pour $a = 2$, la matrice A est inversible.
3. Montrer que $(2-a)^2 - 1$ est de la forme $(a-x)(a-y)$, pour x et y que l'on déterminera.
4. En supposant $a \neq 2$, donner toutes les valeurs de a pour lesquelles la matrice A n'est pas inversible. (Indication : procéder par pivot)

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver toutes le matrices 2×2 $B \in M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, i.e. telles que $AB = BA$.