MODULE HAX201X
ANNÉE 2023/2024

Corrigé de l'Examen session 1
lundi 13 mai 2024
Durée : 3h

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de l'argumentation.

Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Le barême est indicatif.

Questions isolées (12 points)

(1) On considère l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + \sin(x))/3$.

(a) Montrer que f est contractante.

L'application f est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1 + \cos(x))/3$ et $\cos(x) \in [-1, 1]$ impliquent $0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Le théorème (ou plutôt, l'inégalité) des accroissements finis donne alors : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq (\sup_{t\in]x,y[} |f'(t)|)|x - y| \leq \frac{2}{3}|x - y|$. Donc f est contractante, avec $k = 2/3$.

(b) Montrer que la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in \mathbb{R}$, est convergente, et que sa limite est 0.

D'après le théorème du point fixe, comme f est contractante la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ converge vers l'unique point fixe l de f. Ce point fixe vérifie $f(l) = l$, soit $\sin(l) = 2l$. Donc $l = 0$.

(2) Soit (u_n) un suite réelle majorée. Rappeler la définition de $\limsup u_n$, puis calculer $\limsup u_n$ pour $u_n = 1 + (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$.

Par définition, $\limsup u_n = \lim_{n\to+\infty} \bar{u}_n$, où $\bar{u}_n := \sup_{p\geq n} u_p$. Pour $u_n = 1 + (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$, on a $u_{2n+1} = 1/(2n + 1)$ et $u_{2n} = 2 - 1/2n$, donc $\bar{u}_n = 2$, et $\limsup u_n = 2$.

(3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1 + x) - \sin(x)}{x^2}.$$

On a $$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{(1 + x^2 + o(x^2)) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} = \frac{3}{2} + o(1)$$

donc $\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}$.

On a $$\frac{\ln(1 + x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x + o(x^2))}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

donc $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

(4) Calculer le $DL_4(0)$ de
$$f(x) = \frac{e^{x^4}}{1 + 2\sqrt{1 + x^2}}.$$
Quelle est la valeur de la dérivée quatrième de f en 0, $f^{(4)}(0)$?

On a
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 + x^4 + o(x^4)}{1 + 2(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4))} \\ &= \frac{1 + x^4 + o(x^4)}{3(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{12} + o(x^4))} \\ &= \frac{1}{3}(1 + x^4 + o(x^4))(1 - (\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)) + (\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{12} + o(x^4))^2 + o(x^4)) \\ &= \frac{1}{3}(1 + x^4 + o(x^4))(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{36} + o(x^4)) \\ &= \frac{1}{3}(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{43}{36}x^4 + o(x^4)) = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{43}{108}x^4 + o(x^4)). \end{aligned}$$
Puisque f est de classe C^4, la formule de Taylor-Young et le calcul ci-dessus donnent $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{43}{108}$, soit $f^{(4)}(0) = \frac{86}{9}$.

(5) Montrer que
$$\ln(e^x + x^3) - \sqrt[3]{1 + x^3} =_{+\infty} -\frac{1}{3x^2} + o(x^{-2}).$$

On a
$$\begin{aligned} \ln(e^x + x^3) - \sqrt[3]{1 + x^3} &= \ln(e^x(1 + x^3e^{-x})) - x\sqrt[3]{1 + x^{-3}} \\ &= \ln(e^x) + \ln(1 + x^3e^{-x})) - x\sqrt[3]{1 + x^{-3}} \\ &=_{+\infty} x + (x^3e^{-x} + o(x^3e^{-x})) - x(1 + \frac{1}{3x^3} + o(\frac{1}{3x^3})) \\ &=_{+\infty} x^3e^{-x} + o(x^3e^{-x}) - \frac{1}{3x^2} + o(\frac{1}{3x^2}) \\ &=_{+\infty} -\frac{1}{3x^2} + o(x^{-2}) \end{aligned}$$
En notant que $\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = 0$ et $x^3e^{-x} =_{+\infty} o(x^{-2})$ par croissances comparées.

(6) Déterminer la nature des séries numériques suivantes :
$$S = \sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}} + 4}\right) \qquad T = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n + 2)} \qquad U = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n + 2)}$$
Pour U, on pourra utiliser une comparaison appropriée.

On a $\sin\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}+4}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}+4}$, et $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}+4} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, donc par comparaison de séries à termes généraux positifs, la série S converge.

La série T est alternée, et si on pose $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n+2)}$ on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et (v_n) est une suite décroissante (car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\ln(x+2)$ est croissante !). Alors il découle du critère spécial des séries alternées que T converge.

On a $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n+2)})$ par croissances comparées, et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de séries à termes généraux positifs, la série U diverge.

Exercice 1 (7 points)

(1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge, et justifier que $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} =_{+\infty} o(\frac{a^n}{n!})$.

On applique le critère de D'Alembert : en posant $u_n = \frac{a^n}{n!}$ on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0$, donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge. Ce calcul de limite montre bien que $u_{n+1} =_{+\infty} o(u_n)$.

(2) Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange, et ensuite l'expliciter à l'ordre $n+1$ pour la fonction $\exp\colon x \mapsto e^x$ entre les points 0 et $a \in \mathbb{R}$.

Énoncé du théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre n : Soit I un intervalle ouvert, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et $n+1$ fois différentiable sur I. Alors pour tous $a, b \in I$ il existe θ strictement compris entre b et a tel que

$$f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(a-b)^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(a-b)^{n+1}.$$

Pour $f = \exp\colon x \mapsto e^x$ et $b = 0$ on a $f^{(k)}(0) = 1$ et $f^{(n+2)}(\theta) = e^\theta$, donc on obtient à l'ordre $n+1$:

$$e^a = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a^k}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!}a^{n+2}. \tag{1}$$

(3) Déterminer un entier n tel que

$$e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{6}.$$

Avec les notations précédentes, pour $b = 0$ et $a = 1$ on a $1 < e^\theta < e$, et alors (1) implique $e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \frac{e^\theta}{(n+2)!} < \frac{e}{(n+2)!}$. Comme $e \approx 2.71$, il suffit de prendre $n = 2$.

(4) À l'aide des questions (1) et (2), montrer que

$$e^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \sim_{+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

puis montrer que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ et déterminer un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

D'après la formule (1) on a $e^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + e^\theta \frac{a^{n+2}}{(n+2)!}$. On a vu à la question (1) que $\frac{a^{n+2}}{(n+2)!} =_{+\infty} o(\frac{a^{n+1}}{(n+1)!})$, donc

$$e^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} =_{+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + o(\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}),$$

d'où

$$e^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \sim_{+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{2}$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. Alors l'équivalent (2) donne

$$\lim_{n\to+\infty} (e^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

c'est-à-dire $e^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$. Pour $a = 1$ cela donne

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}. \tag{3}$$

Par conséquent $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, et alors l'équivalent (2) implique

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sim_{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}. \tag{4}$$

(5) Montrer que

$$\sin(2\pi n!e) = \sin\left(2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)$$

.

On remplace e par la série (3) :

$$\sin(2\pi n!e) = \sin\left(2\pi n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) = \sin\left(2\pi n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)\right)$$

$$= \sin\left(2\pi \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} + 2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) = \sin\left(2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)$$

par 2π-périodicité de sin.

(6) En déduire la nature de la série $\sum \sin(2\pi n!e)$.

D'après l'équivalent (4) et la question précédente on a $\sin(2\pi n!e) \sim_{+\infty} \sin(2\pi n! \frac{1}{(n+1)!})$ (noter que l'équivalent tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, donc on peut bien composer par sin), donc

$$\sin(2\pi n!e) \sim_{+\infty} \sin(\frac{2\pi}{n+1}) \sim_{+\infty} \frac{2\pi}{n+1}.$$

La série $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge, donc par comparaison la série $\sum \sin(2\pi n!e)$ diverge.

Exercice 2 (5 points)

Soit $a > 0$.

(1) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a

$$\int_k^{k+1} \frac{a}{a^2+x^2}dx \leq \frac{a}{a^2+k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{a}{a^2+x^2}dx.$$

Pour tout $x \in [k, k+1]$ on a $a^2 + k^2 \leq a^2 + x^2 \leq a^2 + (k+1)^2$, donc

$$\frac{a}{a^2+(k+1)^2} \leq \frac{a}{a^2+x^2} \leq \frac{a}{a^2+k^2}$$

(noter que $a > 0$). En intégrant sur $[k, k+1]$ et en utilisant $\int_k^{k+1} \frac{a}{a^2+l^2}dx = \frac{a}{a^2+l^2}$ pour $l = k$ et $l = k+1$, on obtient

$$\frac{a}{a^2+(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{a}{a^2+x^2} \leq \frac{a}{a^2+k^2}$$

ce qui équivaut aux inégalités demandées.

(2) Calculer la dérivée de la fonction $\arctan(x/a)$, puis à l'aide de la question (1) montrer que

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2+k^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On a $\arctan(x/a)' = \frac{1}{a}\arctan'(x/a) = \frac{1}{a(1+(x/a)^2)} = \frac{a}{a^2+x^2}$. En additionnant les inégalités obtenues à la question (1) de $k = 1$ à N on obtient

$$\int_1^{N+1} \frac{a}{a^2+x^2}dx \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{a^2+k^2} \leq \int_0^{N} \frac{a}{a^2+x^2}dx.$$

Puisque $\arctan(x/a)$ est une primitive de $\frac{a}{a^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\arctan((N+1)/a) - \arctan(1/a) \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{a}{a^2+k^2} \leq \arctan(N/a).$$

Par passage à la limite $N \to +\infty$, on déduit

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(1/a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2+k^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, par passage à la limite $a \to +\infty$ dans ces inégalités, on a $\lim_{a\to+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2+k^2} = \frac{\pi}{2}$.