UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

☐ Licence * (L) ☐ Master * (M)

UNIVERSITÉ MONTPELLIER

MENTION : ....

PARCOURS : ....

U. E. : ....

N° de la salle de cours ou de l'Amphi : ....

SUJET DE M. : ....

Date de l'épreuve : ....

SESSION * : ☐ 1 ☐ 2

* *Cocher la case utile*

N° D'ANONYMAT : | | | | | | |

(*INDISPENSABLE*)

N° de la copie : /

Exemple : 1/3 - 2/3

AVIS IMPORTANT :
Tout signe de reconnaissance sur la copie entraînera pour l'étudiant l'annulation de l'épreuve.

Ne pas écrire dans cette marge

NOTE /

Cadre réservé au correcteur

Ex 1

1. l'erreur de consistance est définie par :

$$\varepsilon(h) := y(t_0+h) - h\, f\left(t_0+\frac{h}{2}, y(t_0)+\frac{h}{2} f(t_0,y(t_0))\right) - y(t_0)$$

on effectue un développement de Taylor :

$$y(t_0+h) = y(t_0) + h\, y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + O(h^3)$$

$$f\left(t_0+\frac{h}{2}, y(t_0)+\frac{h}{2} f(t_0,y(t_0))\right) = f(t_0,y(t_0)) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,y(t_0)) + \frac{h}{2} f(t_0,y(t_0))\frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y(t_0)) + O(h^2)$$

On remarque que $y'(t_0) = f(t_0,y(t_0))$

et en dérivant % t $\quad y''(t) = \frac{d}{dt} f(t,y(t))$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'(t)$$

Donc $y''(t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,y(t_0)) + f(t_0,y(t_0))\frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y(t_0))$

Ainsi $\varepsilon(h) = \cancel{y(t_0)} + \cancel{h\, f(t_0,y(t_0))} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)(t_0,y(t_0)) - \cancel{y(t_0)} - \cancel{h\, f(t_0,y(t_0))} - \frac{h^2}{2}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{h^2}{2} f\frac{\partial f}{\partial y} + O(h^3)$

$\varepsilon(h) = O(h^3)$ quand $h \to 0$

2 -

$$|f(t_n+\tfrac{h}{2}, y + \tfrac{h}{2} f(t_n,y)) - f(t_n+\tfrac{h}{2}, z + \tfrac{h}{2} f(t_n,z))|$$

$$\leq L \, |y + \tfrac{h}{2} f(t_n,y) - z - \tfrac{h}{2} f(t_n,z)|$$ f L. Lipschitz % y

ineg. triang.

$$\leq L \left(|y-z| + \tfrac{h}{2} \, |f(t_n,y) - f(t_n,z)| \right)$$

$$\leq L \left(|y-z| + \tfrac{h}{2} L |y-z| \right)$$ f L. Lipschitz % y

$$\leq L \left(1 + \tfrac{h}{2} L\right) |y-z|$$

donc $y \longmapsto f(t_n+\frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t_n,y))$ est Lipschitz de rapport $L(1+\frac{h}{2}L)$

3 - le schéma du pt milieu est un schéma à un pas :

$$y_{n+1} = y_n + h \, \Phi(t_n, y_n; h)$$

avec Φ Lipschitz % y_n

l'erreur de consistance est $O(h^3)$

Donc par le théorème de convergence des schémas à un pas, le schéma est convergent et d'ordre 2. cela signifie

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| = O(h^2)$$

Ex2

1. le schéma s'écrit sous la forme

$$y_{n+4} - y_{n+2} = h\left(\frac{29}{90} f_{n+4} + \frac{124}{90} f_{n+3} + \frac{24}{90} f_{n+2} + \frac{4}{90} f_{n+1} - \frac{1}{90} f_n\right)$$

soit les polynômes associés :

$$\rho(z) = z^4 - z^2 \quad \text{et} \quad \sigma(z) = \frac{29}{90} z^4 + \frac{124}{90} z^3 + \frac{24}{90} z^2 + \frac{4}{90} z - \frac{1}{90}$$

$\rho(1) = 0$

$\rho'(1) = 4 - 2 = 2 \quad = \quad \sigma(1) = \frac{29+124+24+4-1}{90} = \frac{180}{90} = 2$

Donc le schéma est consistant.

2. Etudions les racines de $\rho(z) = z^2(z-1)(z+1)$

les racines sont 0 double

1 simple

-1 simple.

Donc les racines sont bien de module ≤ 1

et les racines de module 1 sont simples

le schéma est donc stable.

Variante on étudie le schéma pour $f \equiv 0$

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 0 \implies y_{2p} = y_0$$

$$y_{2p+1} = y_1$$

donc $|y_n| \leq \max(|y_0|, |y_1|)$

le schéma est donc stable.

3. Le schéma est stable et consistant, d'après le th. de convergence des schémas multipas il est convergent et d'ordre $6 - 1 = 5$

(l'erreur de consistance est $O(h^6)$)

Ex 3

1– les courbes caractéristiques sont les courbes intégrales de l'EDO

$$\begin{cases} X'(t) = e^{-X(t)} \\ X(t) = x_0 \end{cases}$$

c'est une EDO à variables séparables :

$$e^{X(t)} X'(t) = 1$$

$$\int_0^t e^{X(s)} X'(s)\, ds = t$$

$$e^{X(t)} - e^{x_0} = t$$

$$e^{X(t)} = t + e^{x_0}$$

$$\boxed{X(t) = \ln(t + e^{x_0})}$$

2– Soit $v(t) = u(X(t), t)$

$$\frac{dv}{dt} = u_x \cdot X'(t) + u_t$$

$$= u_x(X(t), t)\, e^{-X(t)} + u_t(X(t), t)$$

$= 0$ car u solution de (2)

donc $v(t) = \text{const} = v(0) = u(x_0, 0) = f(x_0)$ avec la condition initiale.

Ainsi $u(\ln(t + e^{x_0}), t) = f(x_0)$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad x = \ln(t + e^{x_0})$

$$e^x = t + e^{x_0}$$

$$x_0 = \ln(e^x - t) \quad \text{pour } t < e^x$$

donc $u(x,t) = f(\ln(e^x - t))$
définie sur $\{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid t < e^x\}$

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

☐ Licence * (L) ☐ Master * (M)

MENTION : ....
PARCOURS : ....
U. E. : ....
N° de la salle de cours ou de l'Amphi : ....
SUJET DE M. : ....
Date de l'épreuve : ....

SESSION * : ☐ 1 ☐ 2

* Cocher la case utile

N° D'ANONYMAT : | | | | | | |

(INDISPENSABLE)

N° de la copie : /

Exemple : 1/3 - 2/3

AVIS IMPORTANT :
Tout signe de reconnaissance sur la copie entraînera pour l'étudiant l'annulation de l'épreuve.

Ne pas écrire dans cette marge

NOTE /

Cadre réservé au correcteur

Ex 4

1) $u_j^{n+1} - u_j^n = \frac{d\,\delta t}{\delta x^2}\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right)$

$u_j^{n+1} = r u_{j-1}^n + (1-2r) u_j^n + r u_{j+1}^n$

2) si $r \leq 1/2$ $1-2r \geq 0$

et comme $d>0$ $r>0$ donc

r, $1-2r$, r sont des coefficients barycentriques :

ils sont positifs et somment à un.

donc $\inf_j u_j^n \leq u_j^{n+1} \leq \sup_j u_j^n$

et donc par récurrence

$\inf_j u_j^0 \leq u_j^n \leq \sup_j u_j^0$

3-

on sait que l'erreur de consistance du schéma est donné par

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) := u(x_j, t_{n+1}) - r\, u(x_{j-1}, t_n) - (1-2r)\, u(x_j, t_n) - r\, u(x_{j+1}, t_n)$$

Effectuons des développements de Taylor:

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = u(x_j, t_n + \delta t) - r\, u(x_j - \delta x, t_n) - (1-2r)\, u(x_j, t_n) - r\, u(x_j + \delta x, t_n)$$

$$u(x_j, t_n + \delta t) = u(x_j, t_n) + \delta t\, u_t(x_j, t_n) + O(\delta t^2)$$

$$u(x_j - \delta x, t_n) = u(x_j, t_n) - \delta x\, u_x(x_j, t_n) + \frac{\delta x^2}{2} u_{xx}(x_j, t_n) - \frac{\delta x^3}{6} u_{xxx}(\,) + O(\delta x^4)$$

$$u(x_j + \delta x, t_n) = u(x_j, t_n) + \delta x\, u_x(x_j, t_n) + \frac{\delta x^2}{2} u_{xx}(\quad) + \frac{\delta x^3}{6} u_{xxx}(\,) + O(\delta x^4)$$

En portant ces développements dans $\varepsilon(\delta t, \delta x)$ on obtient:

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = \cancel{u(x_j, t_n)} + \delta t\, u_t + O(\delta t^2) - (1-2r)\cancel{u(x_j, t_n)}$$
$$- r\left(\cancel{u(x_j, t_n)} - \cancel{\delta x\, u_x} + \frac{\delta x^2}{2} u_{xx} - \cancel{\frac{\delta x^3}{6} u_{xxx}} + O(\delta x^4)\right)$$
$$- r\left(\cancel{u(x_j, t_n)} + \cancel{\delta x\, u_x} + \frac{\delta x^2}{2} u_{xx} + \cancel{\frac{\delta x^3}{6} u_{xxx}} + O(\delta x^4)\right)$$

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = \delta t\, u_t - r\, \delta x^2 u_{xx} + O(\delta t^2) + r\, O(\delta x^4)$$

$$r := \frac{d\, \delta t}{\delta x^2} \qquad \text{donc } r\, \delta x^2 = d\, \delta t$$
$$\text{et } r\, O(\delta x^4) = O(\delta t\, \delta x^2)$$

Donc

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = \delta t\, u_t - d\, \delta t\, u_{xx} + O(\delta t^2) + O(\delta t\, \delta x^2)$$
$$= \delta t\, (u_t - d\, u_{xx}) + O(\delta t^2) + O(\delta t\, \delta x^2)$$

or u solution de (3) donc $u_t = d\, u_{xx}$

il reste

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = O(\delta t^2) + O(\delta t\, \delta x^2)$$

4-

On écrit $u(x_j, t_{n+1}) = r\, u(x_{j-1}, t_n) + (1-2r)\, u(x_j, t_n) + r\, u(x_{j+1}, t_n) + \varepsilon(\delta t, \delta x)$

$$u_j^{n+1} = r\, u_{j-1}^n + (1-2r)\, u_j^n + r\, u_{j+1}^n$$

On soustrait membre à membre :

$$u(x_j, t_{n+1}) - u_j^{n+1} = r\left(u(x_{j-1}, t_n) - u_{j-1}^n\right) + (1-2r)\left(u(x_j, t_n) - u_j^n\right) + r\left(u(x_{j+1}, t_n) - u_{j+1}^n\right) + \varepsilon(\delta t, \delta x)$$

On obtient

$$E_j^{n+1} = r\, E_{j-1}^n + (1-2r)\, E_j^n + r\, E_{j+1}^n + \varepsilon(\delta t, \delta x)$$

$\square$

5- $0 < r \leq 1/2$ donc r, $1-2r$, r sont positifs et sommes à un

$$|E_j^{n+1}| \leq r\, |E_{j-1}^n| + (1-2r)\, |E_j^n| + r\, |E_{j+1}^n| + |\varepsilon(\delta t, \delta x)|$$

donc $|E_j^{n+1}| \leq r\, \|E^n\|_\infty + (1-2r)\, \|E^n\|_\infty + r\, \|E^n\|_\infty + |\varepsilon(\delta t, \delta x)|$

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \|E^n\|_\infty + |\varepsilon(\delta t, \delta x)|$$

d'après la question (3)

$$|\varepsilon(\delta t, \delta x)| = O(\delta t^2) + O(\delta t\, \delta x^2)$$

Cela signifie que $|\varepsilon(\delta t, \delta x)| \leq C(\delta t^2 + \delta t\, \delta x^2)$

la constante C provient des développt de Taylor effectués à la question 3.

$$C = \sup\left(\frac{|u_{tt}|}{2} + 2d \frac{|u_{xxxx}|}{4!} \right)$$

qui est bornée sur $\mathbb{R}$ par hypothèse.

donc $\|E^{n+1}\|_\infty \leq \|E^n\|_\infty + C\delta t(\delta t + \delta x^2)$

6- par récurrence on montre que

$$\|E^n\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty + Cn\,\delta t(\delta t + \delta x^2)$$

or $n\delta t \leq N\delta t \leq T \quad \forall n \leq N$

donc $\|E^n\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty + CT(\delta t + \delta x^2)$

comme on suppose que $u_j^0 = u(x_j, 0)$

$E^0 \equiv 0$ donc

$$\|E^n\|_\infty \leq CT(\delta t + \delta x^2) \quad \forall n \leq N$$

$\square$