UNIVERSITE DE MONTPELLIER

FACULTE DES SCIENCES

Session : examen session 1

Date : 23/05/2024

L3 Licence Mathématiques & Mécanique

Parcours : MG, MSM

UE : Analyse numérique des équations différentielles. (HAX604X)

Durée de l'épreuve : 2h

Documents autorisés : néant

Matériels autorisés : néant.

Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Baréme indicatif. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. (5 pts) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0. \tag{1}$$

On considére le schéma suivant (dit du point-milieu) :

$$y_{n+1} = y_n + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

oé l'on note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est suffisamment réguliére et que $y \mapsto f(t, y)$ est globalement lipschitzienne de rapport L, indépendant de t.

1. (2pts) Estimer l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance du schéma quand $h \to 0$.
2. (2pts) Montrer que, pour t_n et h fixés, l'application $y \mapsto f\left(t_n + \frac{h}{2},\, y + \frac{h}{2} f(t_n, y)\right)$ est Lipschitzienne.
3. (1 pt) On fixe $T > 0$. Estimer l'ordre de grandeur de $\max_{0 \le t_n \le T} |y(t_n) - y_n|$ quand $h \to 0$. Quel est l'ordre du schéma ? Justifiez vos réponses.

Exercice 2 (5 pts) Soit l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. On note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On note $f_k = f(t_k, y_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On suppose que f est suffisamment réguliére et que $y \mapsto f(t, y)$ est globalement lipschitzienne de rapport L, indépendant de t.

Le schéma de Milne est donné par

$$y_{n+1} - y_{n-1} = h\left(\frac{29}{90} f_{n+1} + \frac{124}{90} f_n + \frac{24}{90} f_{n-1} + \frac{4}{90} f_{n-2} - \frac{1}{90} f_{n-3}\right).$$

C'est un schéma multipas implicite qui permet de calculer y_{n+1} étant donnés y_n, y_{n-1},. . ., y_{n-3}.

1. (2 pts) Montrer que le schéma de Milne est consistant. *On ne demande pas d'estimer l'ordre de l'erreur de consistance.*
2. (2 pts) Montrer que le schéma de Milne est stable.
3. (1 pt) On *admet* que l'erreur de consistance est en $\mathcal{O}(h^6)$. Quelle est l'ordre de convergence du schéma ? Justifiez.

T.S.V.P.

Exercice 3. (4 pts) On considére l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + e^{-x}\,u_x = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \tag{2}$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. (2pts) Déterminer les courbes caractéristiques de l'équation (2).
2. (2pts) En déduire la solution $u(x,t)$ de l'EDP (2) obtenue. Préciser son domaine de définition dans $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

Exercice 4. (6 pts) Soit $d > 0$ une constante réelle strictement positive. On considére l'équation aux dérivées partielles

$$u_t - d\,u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \tag{3}$$

Soit un pas de temps δt et un pas d'espace δx. On définit $x_j = j\delta x$ et $t_n = n\delta t$ pour $j \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$. On note u_j^n une valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ calculée par le schéma numérique explicite suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} - d\,\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\delta x^2} = 0$$

Dans la suite on pose

$$r = \frac{d \cdot \delta t}{\delta x^2}.$$

1. (1pt) Montrer que le schéma s'écrit sous la forme
$$u_j^{n+1} = r\,u_{j-1}^n + (1-2r)\,u_j^n + r\,u_{j+1}^n.$$
2. (1 pt) Montrer que si $r \leq \frac{1}{2}$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \inf_j u_j^0 \leq u_j^n \leq \sup_j u_j^0$.
3. (1pts) Montrer que l'erreur de consistance du schéma $\epsilon(\delta t, \delta x)$ vérifie :
$$\epsilon(\delta t, \delta x) = \mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta t\,\delta x^2).$$
4. (1 pt) On pose $E_j^n := u(x_j, t^n) - u_j^n$ l'erreur d'approximation. Montrer que
$$E_j^{n+1} = r\,E_{j-1}^n + (1-2r)\,E_j^n + r\,E_{j+1}^n + \epsilon(\delta t, \delta x).$$
5. (1 pt) On suppose désormais que $r \leq 1/2$. On note $\|E^n\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{Z}} |E_j^n|$. Démontrer la majoration
$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \|E^n\|_\infty + C\,\delta t\,(\delta t + \delta x^2),$$
où C est une constante convenable. (On suppose que u_{tt} et u_{xxxx} sont bornées sur $\mathbb{R}$.)
6. (1 pt) Soit $N \geq 1$ un entier fixé. On pose $T = N\delta t$. On suppose que $u_j^0 = f(x_j) = u(x_j, 0)$. Montrer que
$$\forall n \leq N,\ \|E^n\|_\infty \leq C\,T\,(\delta t + \delta x^2).$$

   Cela démontre que le schéma est convergent sur $\mathbb{R} \times [0, T]$ et qu'il est d'ordre un en temps et d'ordre deux en espace.
