Module HAX201X
Année 2023/2024

Examen session 1
lundi 13 mai 2024
Durée : 3h

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de l'argumentation.

Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Le barême est indicatif.

Questions isolées (12 points)

(1) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + \sin(x))/3$.

  (a) Montrer que f est contractante.

  (b) Montrer que la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in \mathbb{R}$, est convergente, et que sa limite est 0.

(2) Soit (u_n) un suite réelle majorée. Rappeler la définition de $\limsup u_n$, puis calculer $\limsup u_n$ pour $u_n = 1 + (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$.

(3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}.$$

(4) Calculer le $DL_4(0)$ de

$$f(x) = \frac{e^{x^4}}{1 + 2\sqrt{1 + x^2}}.$$

Quelle est la valeur de la dérivée quatrième de f en 0, $f^{(4)}(0)$?

(5) Montrer que

$$\ln(e^x + x^3) - \sqrt[3]{1 + x^3} =_{+\infty} -\frac{1}{3x^2} + o(x^{-2}).$$

(6) Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$S = \sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}} + 4}\right) \qquad T = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n+2)} \qquad U = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n+2)}$$

Pour U, on pourra utiliser une comparaison appropriée.

Exercice 1 (7 points)

(1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge, et justifier que $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} =_{+\infty} o(\frac{a^n}{n!})$.

(2) Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange, et ensuite l'expliciter à l'ordre $n + 1$ pour la fonction $\exp : x \mapsto e^x$ entre les points 0 et $a \in \mathbb{R}$.

(3) Déterminer un entier n tel que

$$e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{6}.$$

(4) À l'aide des questions (1) et (2), montrer que

$$e^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \sim_{+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

puis montrer que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ et déterminer un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

(5) Montrer que

$$\sin(2\pi n! e) = \sin\left(2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right).$$

(6) En déduire la nature de la série $\sum \sin(2\pi n! e)$.

Exercice 2 (5 points)

Soit $a > 0$.

(1) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a

$$\int_k^{k+1} \frac{a}{a^2 + x^2} dx \leq \frac{a}{a^2 + k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{a}{a^2 + x^2} dx.$$

(2) Calculer la dérivée de la fonction $\arctan(x/a)$, puis à l'aide de la question (1) montrer que

$$\lim_{a \to +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + k^2} = \frac{\pi}{2}.$$