Corrigé du CC2, 22 avril 2024
Durée : 1 h 10

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de l'argumentation.

Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Questions

1. (3 points) Soit h une fonction définie dans un voisinage de $+\infty$ et telle que $h(x) \sim_{+\infty} xe^x$. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $h(x)^5$ et de $\ln(h(x) + 3x^2)$.

D'après le cours, $h(x) \sim_{+\infty} xe^x$ implique $h(x)^5 \sim_{+\infty} (xe^x)^5$. Donc $h(x)^5 \sim_{+\infty} x^5e^{5x}$.

Par définition des équivalents il existe $a \in \mathbb{R}$ et une fonction $r\colon]a, +\infty[\to +\infty$ telle que $f(x) = r(x)xe^x$ et $\lim_{x\to+\infty} r(x) = 1$. Alors

$$\ln(h(x) + 3x^2) = \ln(xe^x(r(x) + 3xe^{-x}) = \ln(xe^x) + \ln(r(x) + 3xe^{-x}).$$

On a $\ln(xe^x) = \ln(x) + \ln(e^x) = \ln(x) + x$, et $\lim_{x\to+\infty} \ln(r(x) + 3xe^{-x}) = \ln(1) = 0$ par croissances comparées. Donc $\ln(h(x)+3x^2) \sim_{+\infty} \ln(x)+x$, soit aussi $\ln(h(x)+3x^2) \sim_{+\infty} x$ par croissances comparées.

2. (4 points) On pose $k(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$.

Donner le DL_2 en 0 de $k(x)$, puis un équivalent simple en $+\infty$ de $k(x)$.

Question bonus 2 **points :** Donner le DL_2 en $x = 1$ de $k(x)$.

$DL_2(0)$ de $k(x)$: via les DL usuels on a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + x + 1} &= \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 + \frac{1}{3}(x + x^2) + \frac{1}{3}.(-\frac{2}{3})\frac{(x + x^2)^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Équivalent simple en $+\infty$ de $k(x)$: on a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + x + 1} &= x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{1 + x^{-2}} - \sqrt[3]{1 + x^{-1} + x^{-2}}\right) \\ &= x^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{9}x^{-2} + o(x^{-2})\right) \\ &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{9}x^{-\frac{4}{3}} + o(x^{-\frac{4}{3}})\end{aligned}$$

où la deuxième ligne vient du $DL_2(0)$ de $k(y)$ calculé ci-dessus, en posant $y = x^{-1}$. Donc $\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + x + 1} \sim_{+\infty} -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

Question bonus : on pose $x = 1 + h$; alors

$$\begin{aligned}
k(x) &= \sqrt[3]{(1+h)^2+1} - \sqrt[3]{(1+h)^2+(1+h)+1} \\
&= \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(h^2+2h)+1} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}(h^2+3h)+1} \\
&= \sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}(h^2+2h)) + \frac{1}{3}.(-\frac{2}{3})\frac{(\frac{1}{2}(h^2+2h))^2}{2} + o((\frac{1}{2}(h^2+2h))^2)\right) \\
&\qquad - \sqrt[3]{3}\left(1 + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}(h^2+3h) + \frac{1}{3}.(-\frac{2}{3})\frac{(\frac{1}{3}(h^2+3h)^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right)h + o(h) \\
&= \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right)(x-1) + o((x-1)).
\end{aligned}$$

3. (4 points) Calculer la limite de

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

lorsque x tend vers 0.

On a via les DL usuels

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6))} - \frac{1}{(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4))} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{(1 - \frac{x^4}{6} + o(x^4))} - \frac{1}{(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\left(1 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right) - \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$.

4. (5 points) Donner le développement de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, où $x > -1$.

On a $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ et la dérivée quatrième

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(4)} = \left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right).\left(-\frac{5}{2}\right).\left(-\frac{7}{2}\right)(1+x)^{-\frac{9}{2}}.$$

Alors d'après le théorème de Taylor-Lagrange il existe θ strictement compris entre 0 et x tel que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right).\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{x^3}{3!} \\
&\qquad + \left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right).\left(-\frac{5}{2}\right).\left(-\frac{7}{2}\right)(1+\theta)^{-\frac{9}{2}}\frac{x^4}{4!} \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3x^2}{8} - \frac{15x^3}{48} + \frac{35}{128}(1+\theta)^{-\frac{9}{2}}x^4. \qquad (1)
\end{aligned}$$

(a) En déduire un nombre rationnel r tel que $|r - \frac{1}{\sqrt{1,1}}| < 10^{-4}$.

On prend $x = 10^{-1}$. Donc $0 < \theta < 10^{-1}$ dans la formule (1), et cette formule montre que le nombre rationnel $r := 1 - \frac{10^{-1}}{2} + \frac{3.10^{-2}}{8} - \frac{15.10^{-3}}{48}$ vérifie $|r - \frac{1}{\sqrt{1,1}}| = \frac{35}{128}(1+\theta)^{-\frac{9}{2}}10^{-4} < 10^{-4}$.

(b) Démontrer que pour tout $x > -1$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{15x^3}{48}.$$

On a $(1+\theta)^{-\frac{9}{2}}x^4 \geq 0$ pour tout $x > -1$, donc la formule (1) implique cette inégalité.

5. (5 points) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

.

(a) Justifier sans calculs que f possède un DL_n en tout point $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction f est de classe C^∞ (c'est un quotient de fonctions C^∞, et le dénominateur ne s'annule jamais). D'après le cours, il s'ensuit que f possède un DL_n en tout point $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Déterminer le DL_2 de f en $x = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x}{1+x^2} \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right).\left(1 - x^2 + o(x^2)\right) \\
&= 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

(c) Donner l'équation de la tangente au graphe de f en $(0, f(0))$, et sa position par rapport au graphe de f.

Notons D cette droite. D'après le cours et le calcul précédent, l'équation cartésienne de D est $y = x + 1$, et comme $f(x) - (x+1) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ est négatif au voisinage de $x = 0$, D se trouve au-dessus du graphe de f au voisinage de $(0, f(0))$.

(d) **Question bonus 2 points :** Donner l'équation de la tangente au graphe de f en $(1, f(1))$, et sa position par rapport au graphe de f.

Il faut faire le $DL_2(1)$ de f. On pose $x = 1 + h$; alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{1+h}}{1+(1+h)^2} \\
&= \frac{e}{2}\left(\frac{e^h}{1+\frac{1}{2}(h^2+2h)}\right) \\
&= \frac{e}{2}\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right).\left(1 - \frac{1}{2}(h^2+2h) + (\frac{1}{2}(h^2+2h))^2 + o(h^2)\right) \\
&= \frac{e}{2}\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right).\left(1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \\
&= \frac{e}{2}\left(1 + h^2 + o(h^2)\right) \\
&= \frac{e}{2}\left(1 + (x-1)^2 + o((x-1)^2)\right).
\end{aligned}$$

Donc l'équation de la tangente au graphe de f en $(1, f(1))$ est $y = \frac{e}{2}$, et elle se trouve localement sous le graphe de f. En fait, $(1, f(1))$ est un minimum local !