MODULE HAX201X
ANNÉE 2022/2023

Examen de deuxième session
27 juin 2023
Durée : 3h

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Le barème est indicatif et pourra être modifié lors de la correction.

Questions de cours *(3 points)*

Soit (u_n) une suite réelle.

(1) Donner la définition de « (u_n) est de Cauchy ».
(2) Redémontrer que si (u_n) converge, alors (u_n) est de Cauchy.
(3) Redémontrer que si (u_n) est de Cauchy alors (u_n) est bornée.

Questions de cours *(3 points)*

(1) Enoncer le théorème des accroissement finis.
(2) Illustrer le théorème des accroissement finis au moyen du graphe de la fonction.
(3) Pour deux fonctions f, g définies au voisinage de 0, que signifie la relation $f(x) \underset{0}{=} o(g(x))$?

Questions de cours *(3 points)*

(1) Montrer que la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

(2) Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles positives vérifiant $a_n = O(b_n)$. Montrer que si la série $\sum b_n$ est convergente, alors la série $\sum a_n$ est aussi convergente

Exercice 1 *(5 points)*

(1) Montrer que la fonction $F(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - x + 1}$ admet un DL asymptotique en $+\infty$ de la forme
$$F(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big).$$
Il faut donner les valeurs explicites de a, b et c.

(2) — Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en $x = 0$ de $f(x) = \ln(\cos(x))$.
— En déduire la limite de $\cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$ lorsque $x \to 0$.

(3) En utilisant le théorème de Taylor-Lagrange, montrer que
$$\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3, \quad \forall x > 0.$$

Exercice 2 *(7 points)*

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

et la suite (U_n) définie par

$$U_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

I. Étude de la fonction

(1) Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) < x$. *Indication : on étudiera la fonction* $G(x) = (e^x - e^{-x}) - x(e^x + e^{-x})$.

(2) Montrer que le développement limité à l'ordre 4 de f en 0 est donné par

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

(3) En déduire la limite de $\dfrac{1}{f(x)^2} - \dfrac{1}{x^2}$ lorsque $x \to 0$.

II. Étude de la suite

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.

(2) Montrer que la suite (U_n) converge vers 0.

(3) Calculer la limite de la suite $X_n = \dfrac{1}{U_n^2} - \dfrac{1}{U_{n-1}^2}$, $n \geq 1$.

(4) En appliquant le lemme de Cesàro (rappelé ci-dessous) à la suite (X_n), déterminer un équivalent de (U_n) quand $n \to \infty$.

Lemme de Cesàro. Soit (a_n) une suite réelle convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors la suite de terme général

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

converge également vers ℓ.