Examen du 30 mai 2023
Durée : 3h

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Le barème est indicatif et pourra être modifié lors de la correction.

Questions isolées (12 points)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Donner la définition de la limite inférieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\liminf u_n$.

2. Décrire une suite non-bornée ayant exactement deux valeurs d'adhérence.

3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère la suite $U_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$. Déterminer à quelle condition portant sur a, b, c, la suite (U_n) tend vers 0.

4. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ et en 0 de $g(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x^2+1}$.

5. Calculer la limite de la fonction

$$F(x) = \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2}}{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3}}, \quad x \neq 0,$$

lorsque x tend vers 0.

6. Déterminer le développement limité à l'ordre 9 en 0 de

$$G(x) = \frac{1}{1+x^3+x^4}.$$

Exercice 1 (4 points)

1. Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange.

2. En utilisant le théorème de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $t \geq 0$ on a l'encadrement

$$t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4(1+t)^4}.$$

3. En déduire une approximation de $\ln(1,1)$ à 10^{-5} près. *On se servira du fait que* $(1,1)^{-4} \simeq 0,68$.

Exercice 2 (6 points)

On considère la suite $V_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$, définie pour $n \geq 1$.

(1) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\, dt \leq \sqrt{k} \leq \int_{k}^{k+1} \sqrt{t}\, dt.$$

(2) En déduire que $V_n \sim \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$.

(3) Déterminer pour quels réels α, la série $\sum \frac{V_n}{n^\alpha}$ est convergente.

(4) On étudie maintenant la série $\sum (-1)^n \frac{V_n}{n^2}$.

(a) Montrer que la relation $\frac{V_n}{n^2} \geq \frac{V_{n+1}}{(n+1)^2}$ est équivalente à

$$(\star) \qquad V_n \geq \frac{n^2 \sqrt{n+1}}{2n+1}.$$

(b) Au moyen d'équivalents, montrer que $(\star)$ est satisfait à partir d'un certain rang.

(c) Montrer que la série $\sum (-1)^n \frac{V_n}{n^2}$ est convergente.