Ex1. TD7 :

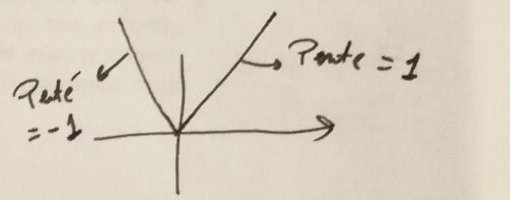
(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = |x|$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$, donc f est continue en 0. Calculons la dérivée de f en 0.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$\neq$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$



f n'est pas dérivable en 0 car $f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} \neq f'(0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h-0}$

(2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = x^{5/3}$, on a $f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}$, f est continue et dérivable et sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f \in C^1(\mathbb{R})$

$f''(x) = \frac{10}{9} x^{-1/3}$ qui n'est pas définit en 0, donc f n'est pas deux fois dérivable en 0 (~~... aussi, f'' n'est pas continue en 0~~) ;

2ème Méthode : montrons que f n'est pas deux fois dérivable en 0, c'est à dire f' n'est pas dérivable en 0.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(h)-f'(0)}{h-0} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{5}{3} h^{\frac{2}{3}} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5}{3} h^{-\frac{1}{3}} = \infty \begin{pmatrix} +\infty \text{ si } h \to 0^+ \\ -\infty \text{ si } h \to 0^- \end{pmatrix}$$

~~Donc~~

(3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = x^{n+\frac{1}{3}}$

on a $f'(x) = (n+\frac{1}{3}) x^{(n-1)+\frac{1}{3}}$

$f''(x) = (n+\frac{1}{3})(n-1+\frac{1}{3}) x^{(n-2)+\frac{1}{3}}$

$\vdots$

$f^{n}(x) = \alpha_n x^{\frac{1}{3}}$

$\Longrightarrow$ f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et la $n$ième dérivée de f est continue sur $\mathbb{R}$

$f^{n+1}(x) = \frac{1}{3} \alpha_n x^{-\frac{2}{3}}$ qui n'est pas définit en 0, donc f n'est pas $(n+1)$ fois dérivable en 0.

Alors, $f \in C^n(\mathbb{R})$, mais f n'est pas $n+1$ fois dérivable en 0

Ex 2 :

Soit : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^∞

a) Si f est un Polynome de degrés m, Alors $\exists a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ $\forall x \in \mathbb{R}$, on remarque que $f^{(m+1)}(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc si f est de degrés m:

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n = m+1 \in \mathbb{N}$ tq $f^{(n)}(x) = 0$, (a) est Vrai ✓

b) Si $f(x) = 2x$ et Pour $n = 1$, on a $f^{(1)}(x) = f'(x) = 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc Pour $n = 1$, il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ qui vérifie $f^{(1)}(x) = 0$

(b) est faux ✗.

c) Si f est un polynome de degrés m, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$

Pour $n = m+1$, on a $f^{(n)}(x) = f^{(m+1)}(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc $\exists n = m+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f^{(n)}(x) = 0$, Donc (c) est Vrai ✓

d) Soit $f(x) = 2x$, Pour $n = 1$ on a $f^{(1)}(x) = 2 \neq 0$

Donc Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exists n = 1$ tq $f^{(1)}(x) = 2 \neq 0$, Donc (d) est faux ✗

Rq : +) Pour montrer qu'une donnée est Vrai, il faut la montrer pour n'importe quelle polynome f.

+) Pour montrer qu'une donnée est fausse, il suffit de trouver un seul Contre exemple.

EXO 3

(1) $f(x) = \ln(1+x)$ Continue et dérivable sur $]-1,+\infty[$, avec

$f'(x) = \frac{1}{x+1}$ Continue sur $]-1,+\infty[$, donc f est C^1 sur $]-1,+\infty[$

montrons ça par récurrence, Supposons que f est C^n sur $]-1,+\infty[$ et montrons que f est C^{n+1} sur $]-1,+\infty[$.

f est C^n sur $]-1,+\infty[$ donc f est n fois dérivable, et $f^{(n)}$ est Continue sur $]-1,+\infty[$ sur $]-1,+\infty[$ avec $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$ (on montre cette égalité par récurrence).

on Remarque que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, avec

$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^{n+2} \frac{(n)!}{(x+1)^{n+1}}$ qui est Continue sur $]-1,+\infty[$

donc f est $(n+1)$ fois dérivable sur $]-1,+\infty[$, et $f^{(n+1)}$ est Continue sur $]-1,+\infty[$. D'où

f C^{n+1} sur $]-1,+\infty[$.

f est C^n sur $]-1,+\infty[$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ f est C^∞ sur $]-1,+\infty[$.

(2) f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $f^n(x) = \begin{cases} \frac{6!}{(6-n)!} x^{(6-n)} & \forall n \leq 6 \\ 0 & \forall n > 6 \end{cases}$

(3) f C^∞ sur $]0,+\infty[$ et $f^n(x) = (\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(n-1))\, x^{\frac{1}{2}-n}$ $\forall n \geq 1$

(4) f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f^n(x) = e^x$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

5) f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f^n(x) = \begin{cases} \cos(x) \text{ si } n \in \{2k, k \in \mathbb{N}\} \text{ (n pair)} \\ -\sin(x) \text{ si } n \in \{2k+1, k \in \mathbb{N}\} \text{ (n impaire)} \end{cases}$

EX4 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$f(x) \overset{=\text{dc}}{} 0$ sur $]-\infty, 0[$ donc f est C^∞ sur $]-\infty, 0[$

$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $]0, +\infty[$ qui est C^∞ sur $]-\infty, 0[$ (on peut montrer ces par récurrence comme dans l'exo 1)

2) C'est clair que f est continue sur $]-\infty, 0[$ et f est continue sur $]0, +\infty[$

Puisque f est C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Donc il suffit de montrer que f est continue en 0.

$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

Or $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, donc f est continue en 0. D'où

f est continue sur $\mathbb{R}$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ on suppose que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\exists$ un polynôme P_n tq

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\left(-\frac{1}{x}\right)} \quad \forall x > 0.$$

a) Pour $x < 0$, $f = 0$ et donc $f^{n+1}(x) = 0 \quad \forall x < 0$

b) $f^{(n+1)}(x) = (f^n)'(x) = \dfrac{\left(P_n'(x) e^{-\frac{1}{x}} + P_n(x) \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\right) x^{2n} + 2n x^{2n-1} P_n(x) e^{-\frac{1}{x}}}{x^{4n}}$

$= x^{2n} \dfrac{P_n'(x) e^{-\frac{1}{x}} + P_n(x) \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + 2n x^{-1} P_n(x) e^{-\frac{1}{x}}}{x^{4n}}$

$= x^{2n-2} \dfrac{x^2 P_n'(x) e^{-\frac{1}{x}} + P_n(x) e^{-\frac{1}{x}} + 2n x P_n(x) e^{-\frac{1}{x}}}{x^{4n}}$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x}}\left(x^2 P_m'(x) + P_m(x)(1+2mx)\right)}{x^{2(m+1)}} = \frac{e^{-\frac{1}{x}} P_{m+1}(x)}{x^{2(m+1)}} \quad \forall x > 0$$

avec $P_{m+1}(x) = x^2 P_m'(x) + P_m(x)(1+2mx)$.

c) $f^{(m)}$ est dérivable en 0 ?

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f^{(m)}(h) - f^{(m)}(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{P_m(h)}{h^{2m}} e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P_m(h)}{h^{2m+1}} e^{-\frac{1}{h}}. \quad (*)$$

Polynome

$$\frac{P_m(h)}{h^{2m+1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^{\frac{1}{h}}}}_{} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$$

Polynome

$e^{\frac{1}{h}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \infty$ très rapidement

l'exponentiel est le plus rapide en convergeant vers ∞ donc $\frac{1}{e^{\frac{1}{h}}}$ est le plus rapide en convergeant vers 0

or $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f^m(h) - f^m(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0-0}{h} = 0 = (*) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f^m(h) - f^m(0)}{h-0}$

Donc f^m est dérivable en 0 avec $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f^m(h) - f^m(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f^m(h) - f^m(0)}{h} = f^{(m+1)}(0) = 0$

4) f^m est dérivable en 0 et f^m dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (d'après (1))

donc f^m dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus $f^{m+1}(\mathbb{R})$ continue sur $\mathbb{R}$,

$f^{(m+1)}$ continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ $(*, *)$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}_{m+1}(0) = \lim_{x\to 0^+} f^{m+1}(x) = 0$, donc f^{m+1} est continue en 0 $(*, *, *)$

$(**)$ et $(*, *, *) \Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

f^{n} est dérivable sur $\mathbb{R}$ ~~et on a déjà~~ donc f est $n+1$ fois dérivable

de plus f^{n+1} est Continue sur $\mathbb{R}$, Alors f est C^{n+1} Sur $\mathbb{R}$.

On a Supposer que f est C^{n} Sur $\mathbb{R}$ et on a montré que f est C^{n+1}

sur $\mathbb{R}$ (Par récurrence).

D'où $f \in C^{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et ça implique que $f \in C^{\infty}$ Sur $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$

Ex 5 :

1)

x \ n	1	2	3
0,1	0,1	0,01	0,001
0,01	0,01	0,0001	0,000001
0,001	0,001	0,000001	0,000000001

2) $f(x) = x + x^3$

x proche de 0, Par exeple Pour $x = 0,1$

on a $x + x^3 = 0,1 + 0,001 = 0,101$ ($x = 0,1$ et $x^3 = 0,001$)

Proche

Pour $x = 0,01$

on a $x + x^3 = 0,01 + 0,000001 = 0,010001$ ($x = 0,01$ et $x^3 = 0,000001$)

Proche

Pour $x = 0,001$

on a $x + x^3 = 0,001 + 0,000000001 = 0,001000001$ ($x = 0,001$ et $x^3 = 0,000000001$)

Proche

On remarque que dans les trois Cas et Pour x Proche de 0,

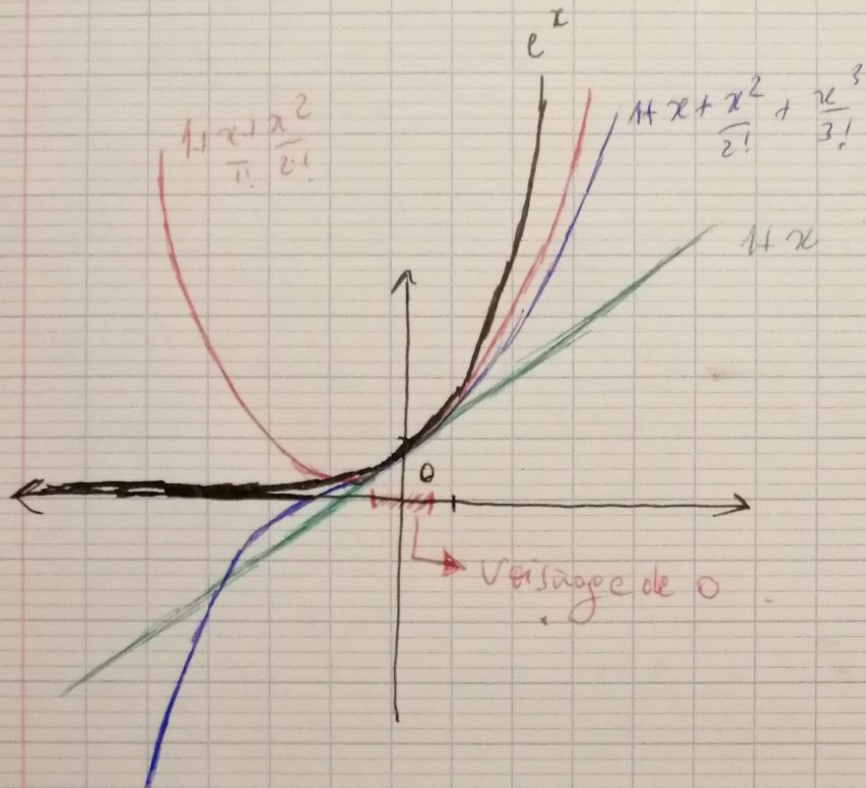
la valeur de $x + x^3$ est plus proche de x. que Celle de x^3. Donc C'est plus.

Pertinent d'approcher $f(x) = x + x^3$ Par x pour x Proche de 0 et

on note $f(x) \approx x$ au voisinage de 0.

Ex 6 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = e^x$



développement limité de f au voisinage de 0 :

à l'ordre 1 : $e^x = 1+x+o(x^2)$

à l'ordre 2 : $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^3)$

à l'ordre 3 : $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$

Rq : on voit bien comment les 4 courbes sont voisines au voisinage de $x=0$, ce qui est pertinent avec le fait que $1+x$; $1+x+\frac{x^2}{2}$; $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ sont sont des approximations de $f(x)=e^x$ au voisinage de $\underline{x=0}$

Ex 7 :

1) ~~Formule~~ formule de Taylor avec reste intégral en l'origine à l'ordre n

$$f(x) = \ln(1+x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)$$

$$+ \int_0^x f^{n}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \, dt \quad \text{avec} \quad f^{n}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(t+1)^n}$$

D'où $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + \underbrace{\int_0^x \frac{(-1)^{n-1}(x-t)^{n-1}}{(t+1)^n} dt}_{R_n(x)}$

2) Calcul de $R_n(x)$ (on suppose $n \geq 2$)

$$R_n(x) = \int_0^x (-1)^{n-1}(x-t)^{n-1}(t+1)^{-n} \, dt = \int_0^x \underbrace{(t-x)^{n-1}}_{v} \underbrace{(t+1)^{-n}}_{u'} dt$$

$$\left[\begin{array}{l} u' = (t+1)^{-n}, \quad u = \frac{-(t+1)^{-(n-1)}}{n-1} \\ v = (t-x)^{n-1}, \quad v' = (n-1)(t-x)^{n-2} \end{array} \right.$$

intégration $\Longrightarrow$ par partie

$$R_n(x) = \left. -\frac{(t+1)^{-(n-1)}}{n-1}(t-x)^{n-1} \right]_0^x + \int_0^x \cancel{(n-1)}(t-x)^{n-2} \frac{(t+1)^{-(n-1)}}{\cancel{n-1}}$$

$$R_n(x) = \frac{(-x)^{n-1}}{n-1} + R_{n-1}(x) = \frac{(-x)^{n-1}}{n-1} + \frac{(-x)^{n-2}}{n-2} + R_{n-2}(x) \dots$$

$$= \frac{(-x)^{n-1}}{n-1} + \dots + \frac{(-x)^2}{2} + R_2(x) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k} + R_2(x)$$

I.PP

avec $R_2(x) = \int_0^x (x-t)(t+1)^{-2}\,dt \overset{\nearrow}{=} -x + \ln(1+x)$

Donc $R_m(x) = \left(\sum_{k=2}^{m-1} (-1)^k \frac{x^k}{k}\right) - x + \ln(1+x)$

$|R_m(x)| = \left|\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \frac{x^k}{k} + \ln(1+x)\right| = \left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right|$

$= \left|f(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} f^{k}(0)\right|$,

$f(0) = f(0) = \ln(1) = 0$

D'après le Cours

$I =]-1,1[$ interval ouvert sur $\mathbb{R}$

$a = 0 \in I$ et $m \in \mathbb{N}^*$, f est de Class C^m

Alors $\forall x \in I$ (en particulier pour $x = -\frac{1}{2}$) on a :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{|x-a|^m}{m!} \max_{t\in[x,a]} |f^{(m)}(t)|$$

$x = -\frac{1}{2}$

$a = 0$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left|f\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right|}_{\left|R_m\left(-\frac{1}{2}\right)\right|} \leq \underbrace{\frac{\left|\frac{-1}{2}\right|^m}{m!} (m-1)! \max_{t\in[-\frac{1}{2},0]} \left|\frac{1}{(t+1)^m}\right|}_{= \frac{\left|\frac{1}{2}\right|^m}{m} \times \left|\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^m}\right| = \frac{1}{m}}$$

$\Rightarrow \left|R_m\left(-\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{m}$ Pour $m > 100$ ($m = 101$ Par exemple)

on aura $\left|R_m\left(-\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{m} < 10^{-2} = \frac{1}{100}$.

2ème Méthode :

$$R_m(x) = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \frac{x^k}{k} + \ln(1+x) \ , \ R_m\left(\frac{-1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2^k k} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \ , \ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2^k k} - \ln(2) \ ; \ \left|R_m\left(\frac{-1}{2}\right)\right| = \left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2^k k} - \ln(2) \right|$$

On remarque que $\left|R_m\left(-\frac{1}{2}\right)\right| < 10^{-2}$ Pour $m > 5$

Par exemple Pour $m = 7$. $(m-1 = 6)$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \cancel{x} -\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384}$$

$$= -0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$