MODULE HAX201X
ANNÉE 2023/2024

CC2, 22 avril 2024
Durée : 1 h 10

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de l'argumentation.

Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Questions

1. (3 points) Soit h une fonction définie dans un voisinage de $+\infty$ et telle que $h(x) \sim_{+\infty} xe^x$. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $h(x)^5$ et de $\ln(h(x) + 3x^2)$.

2. (4 points) On pose $k(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$.

Donner le DL_2 en 0 de $k(x)$, puis un équivalent simple en $+\infty$ de $k(x)$.

Question bonus 2 **points :** Donner le DL_2 en $x = 1$ de $k(x)$.

3. (4 points) Calculer la limite de

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x^2)} - \frac{1}{\ln(1 + x^2)}$$

lorsque x tend vers 0.

4. (5 points) Donner le développement de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, où $x > -1$.

(a) En déduire un nombre rationnel r tel que $|r - \frac{1}{\sqrt{1,1}}| < 10^{-4}$.

(b) Démontrer que pour tout $x > -1$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} \geq 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{15x^3}{48}.$$

5. (5 points) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

.

(a) Justifier sans calculs que f possède un DL_n en tout point $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Déterminer le DL_2 de f en $x = 0$.

(c) Donner l'équation de la tangente au graphe de f en $(0, f(0))$, et sa position par rapport au graphe de f.

(d) **Question bonus** 2 **points :** Donner l'équation de la tangente au graphe de f en $(1, f(1))$, et sa position par rapport au graphe de f.