Feuille d'exercices 4 : Séries de Fourier

Exercice 1 Soient $m, n \in \mathbb{Z}$.

(a) Calculer les primitives de chaque fonctions : $\cos(nt)\cos(mt)$, $\cos(nt)\sin(mt)$ et $\sin(nt)\sin(mt)$.

(b) Déterminer leurs intégrales entre entre $-\pi$ et π.

Exercice 2 A quelle condition une fonction continue 2π-périodique possède t'elle une primitive 2π-périodique ?

Exercice 3 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique.

(a) Montrer que f est paire si et seulement si $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = 0, \forall n \geq 1$.

(b) Montrer que f est impaire si et seulement si $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = 0, \forall n \geq 1$ et $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$.

Indication : on se servira du fait qu'une toute fonction continue 2π-périodique est nulle si ses coefficients de Fourier sont tous nuls.

Exercice 4 À une fonction continue 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on associe ses coefficients de Fourier $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt,\ n \in \mathbb{Z}$.

(a) On suppose f de classe $\mathcal{C}^k$. Quel est le lien entre $c_n(f)$ et $c_n(f^{(k)})$? En déduire que $c_n(f) = O(\frac{1}{n^k})$.

(b) On suppose qu'il existe $k \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $c_n(f) = O(\frac{1}{n^{k+1+\varepsilon}})$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^k$.

(c) Comment caractériser les fonctions 2π-périodiques $\mathcal{C}^\infty$ au moyen des coefficients de Fourier ?

Exercice 5 (a) Rappeler pourquoi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ est convergente, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$, $\forall x \in]0, 2\pi[$.

(c) Est-ce que la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ est uniforme sur $[0, 2\pi]$?

(c) Quelle est la valeur des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$?

Exercice 6 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'unique fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 7 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)$ sur $]-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Exercice 8 Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques (a_n et b_n) de l'unique fonction 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dont la restriction à $]-\pi, \pi]$ vaut :

(a) $t \mapsto \cos(t)$.

(b) $t \mapsto \cos(t)$ si $t \in [0, \pi]$, et $t \mapsto -\cos(t)$ si $t \in]-\pi, 0[$.

En déduire une formule de $\cos(t)$ en fonction d'une somme infinie de $\sin(2nt)$ sur $]0, \pi[$.

Exercice 9 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'unique fonction 2π-périodique telle que $f(x) = (x - \frac{\pi}{2})^2$ sur $[0, \pi]$ et $f(x) = -(x + \frac{\pi}{2})^2$ sur $]-\pi, 0[$. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques (a_n et b_n) de f et en déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 10 Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ sur $[-\pi, \pi[$.

(a) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques (a_n et b_n) de f_α.

(b) En déduire que

$$\operatorname{cotan}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

Exercice 11 (Autour du théorème de Féjer)

On pose $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ et $K_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$.

Montrer que la suite de fonctions (K_n) satisfait la propriétés suivantes :

1. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $K_n(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} K_n(t)dt = 0$, $\forall \varepsilon \in]0, \pi]$.

À une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on associe la suite de fonctions

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5. Montrer que la suite (F_n) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$.
6. Montrer que (F_n) est une suite de polynômes trigonométriques si f est 2π-périodique.