L2 Mathématiques
HAX403X Analyse 4

Université de Montpellier
Année universitaire 2023-2024

Correction du CC du 11 avril 2024

Exercice 1 (10 points)

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la convergence normale sur tout compact de la série $\sum f_n$. Expliquer pourquoi la fonction $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), x \in \mathbb{R}$, est continue lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact.

   Pour tout intervalle $I = [a, b]$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n|_I\|_\infty < +\infty$. Alors, pour la suite des restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)$, on a la majoration

   $$\|R_n|_I\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_n|_I\|_\infty$$

   qui montre que $\lim_{n\to\infty} \|R_n|_I\|_\infty = 0$: la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tous les compacts de $\mathbb{R}$. Comme les fonctions f_n sont continues cela entraine que $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), x \in \mathbb{R}$ est continue.

2. On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur où égal à 1.

   Comme la série $\sum a_n$ est convergente, la suite (a_n) converge vers 0, et donc est bornée. On voit ainsi que l'ensemble $X_a = \{r \geq 0, (a_n r^n) \text{ est bornee } \}$ contient l'intervalle $[0, 1]$, et donc $R_a = \sup X_a \geq 1$.

3. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^2 a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

   Notons R_a et R'_a les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^2 a_n z^n$. Comparons les sous-ensembles $X_a = \{r \geq 0, (a_n r^n) \text{ est bornee } \}$ et $X'_a = \{r \geq 0, (n^2 a_n r^n) \text{ est bornee } \}$. Comme $X'_a \subset X_a$, on a $R'_a = \sup X'_a \leq R_a = \sup X_a$. Donc si $R_a = 0$, on a $R'_a = R_a = 0$

   Supposons que $R_a > 0$ et choisissons $r \in]0, R_a[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $r + \varepsilon < R_a$. Alors, comme la suite $(a_n(r + \varepsilon)^n)$ est bornée, la suite

   $$a_n r^n = a_n(r + \varepsilon)^n \left(\frac{r}{r + \varepsilon}\right)^n$$

   est un grand O de la suite géométrique (ρ^n) où $\rho = \frac{r}{r+\varepsilon} \in]0, 1[$. Cela montre que la suite $(n^2 a_n r^n)$ converge vers 0: en particulier elle est bornée. Cela entraine que $R'_a \geq r$ pour tout $r \in]0, R_a[$: on a donc $R'_a \geq R_a$. On a finalement montré que $R'_a = R_a$.

4. Déterminer la suite (a_n) pour laquelle on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

   En dérivant l'identité $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ deux fois, on obtient

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

   Ainsi $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$.

Exercice 2 (10 points)

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^2 x} \cdot$$

1. Montrer que la fonction $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est bien définie.

   Pour tout $x > 0$, on a $\frac{1}{n+n^2x} \sim \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n^2}$ lorsque $n \to \infty$. Cela montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ converge simplement pour tout $x > 0$.

2. Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$.

   Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Alors $\sup_{x\in[a,b]} \left| \dfrac{1}{n+n^2x} \right| = \dfrac{1}{n+n^2a}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n+n^2a}$ est convergente, on a montré que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ converge normalement sur tout compact de $]0,+\infty[$. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{n+n^2x}$ étant continues, cela entraine que F est continue, comme limite uniforme sur tout compact de fonctions continues.

3. Montrer que la série dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+n^2x}\right)$ converge uniformément sur les compacts de $]0,+\infty[$. En déduire que F est de classe C^1.

   On a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+n^2x}\right) = \frac{-n^2}{(n+n^2x)^2} = \frac{-1}{(1+nx)^2}.$$

   Ainsi pour un intervalle $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on a

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+n^2x}\right) \right| = \frac{1}{(1+na)^2} \sim \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

   Ainsi la série dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+n^2x}\right)$ converge uniformément sur les compacts de $]0,+\infty[$. Cela entraine que F est dérivable, avec

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{(1+nx)^2}, \qquad \forall x > 0.$$

   Comme la dernière série converge uniformément sur tout compact, la fonction F' est continue.

4. Déterminer la limite de F en 0^+. *On utilisera le fait que F est une fonction monotone.*

   À la dernière question on a montré que $F'(x) < 0, \forall x > 0$, ainsi F est une fonction décroissante (de plus qui ne prend que des valeurs positives). Cela entraine que la limite $L = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ existe, à valeurs dans $[0, +\infty]$.

   Maintenant
$$F(\frac{1}{k^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{n^2}{k^2}} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n + \frac{n^2}{k^2}} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1}$$
   On sait que $L = \lim_{k\to\infty} F(\frac{1}{k^2})$. Comme la série $\sum \frac{1}{n+1}$ est divergente, l'inégalité précédente montre que $L = +\infty$.

5. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que
$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{c}{x}\cdot$$

   Méthode 1 : On compare $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ avec la fonction
$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x} = \frac{c}{x}$$
   où $c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. On a
$$0 \leq G(x) - F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx(n+n^2x)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3x^2} = \frac{d}{x^2}$$
   avec $d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. On a montré que, lorsque $x \to +\infty$, on a le DL asymptotique
$$F(x) = \frac{c}{x} + O(\frac{1}{x^2}).$$
   Cela montre que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{c}{x}$.

   Méthode 2 : On considère la fonction $H(x) = xF(x)$, $x > 0$. Un calcul direct donne que
$$H'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+n^2x)^2} \geq 0, \qquad \forall x > 0.$$
   La fonction H est donc croissante. De plus
$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+n^2x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \forall x > 0,$$
   donc H est bornée. On peut donc conclure que $xF(x)$ converge vers un réel $c > 0$ lorsque $x \to +\infty$.