L2 Mathématiques
HAX403X Analyse 4

Université de Montpellier
Année universitaire 2023-2024

Contrôle continu 2
Jeudi 11 avril 2024, 1h10

Tous les documents et appareils électroniques sont interdits.

Exercice 1 (10 points)

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la convergence normale sur tout compact de la série $\sum f_n$. Expliquer pourquoi la fonction $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), x \in \mathbb{R}$, est continue lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact.

2. On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur où égal à 1.

3. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^2 a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

4. Déterminer la suite (a_n) pour laquelle on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Exercice 2 (10 points)

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^2 x} \cdot$$

1. Montrer que la fonction $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est bien définie.

2. Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que la série dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+n^2x}\right)$ converge uniformément sur les compacts de $]0, +\infty[$. En déduire que F est de classe C^1.

4. Déterminer la limite de F en 0^+. *On utilisera le fait que F est une fonction monotone.*

5. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{c}{x} \cdot$$