Université de Montpellier **Année Universitaire 2023-2024**
Faculté des Sciences
Mathématiques

TP noté HAX604X.

Déposer vos fichiers (2 au maximum) sur l'espace moodle de l'UE HAX604X, dans l'espace de dépôt TP noté. Pas d'envoi par mail ! *Vous pouvez déposer des fichiers **.ipynb**. ou **.py** (Python) ou **.m** (Matlab).* La notation tiendra compte de la lisibilité du code, des commentaires et des légendes des figures.

1. En utilisant de façon standard le solveur d'ordre 5 de scipy en Python `solve_ivp` (ou `ode45` en Matlab), écrire un code qui résout l'équation différentielle
$$y''(t) = -\sin y(t)$$
sur l'intervalle de temps $[0, 64]$ avec les conditions initiales suivantes (attention à bien les rentrer)
$$y(0) = \frac{17\pi}{18}, \quad y'(0) = 0.$$
Votre code tracera les deux courbes $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto y'(t)$ sur la même figure. Sur une autre figure, vous tracerez $y \mapsto y'$, c'est-à-dire la trajectoire dans le plan de phase (y, y') ($y(t)$ en abscisse et $y'(t)$ en ordonnée).

2. Pour le même problème avec les *mêmes conditions initiales et le même intervalle de temps*, coder le schéma d'ordre un implicite-explicite suivant, avec un pas de temps constant $h = 0.01$.
$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} p_{n+1} & = & p_n & - & h & \sin q_n \\ q_{n+1} & = & q_n & + & h & p_{n+1} \end{array}\right. \tag{1}$$
Ici q_n désigne la position y_n approximation de $y(t_n)$ et p_n désigne la vitesse y'_n, approximation de $y'(t_n)$ calculées par le schéma aux instants $t_n = n\,h,\ n = 0\ldots$
Votre code tracera de même les deux courbes $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto y'(t)$ sur la même figure. Sur une autre figure, vous tracerez $y \mapsto y'$, c'est-à-dire la trajectoire dans le plan de phase (y, y') ($y(t)$ en abscisse et $y'(t)$ en ordonnée).

3. L'équation différentielle modélise la trajectoire d'un pendule pesant de longueur et masse unité. La variable $y(t)$ correspond à l'angle $\theta(t)$ que fait le pendule avec la verticale, $\theta = 0$ étant la position au repos. Les solutions de l'équation différentielle $y''(t) = -\sin y(t)$ vérifient
$$\frac{1}{2}y'(t)^2 - \cos y(t) = \textit{constante}.$$
Evaluez numériquement cette conservation pour les solutions calculées par Python/ Matlab et pour le schéma (1). Quel schéma respecte le mieux cette intégrale première ? Ecrivez vos réponses en commentaire dans votre code.

4. Evaluer numériquement la **période** du système et comparer les résultats obtenus avec Python/ Matlab et le schéma (1). Sachant que la période théorique vaut $T \approx 15.33$ quel est le schéma qui donne le meilleur résultat ? Ecrivez vos réponses en commentaire dans votre code.

5. Modifier légèrement la condition initiale :
$$y(0) = \frac{19\pi}{20}, \quad y'(0) = 0.$$
Comparez les solutions calculées par les deux schémas. Commentez.