TP3 : Résultant et élimination

Exercice 1 : La méthode "résultant"

a. Trois anneaux de polynômes

In [78]:
```
Qx.<x>=QQ['x']
Qyx.<y>=Qx['y']
QYX.<Y,X>=QQ['Y,X']
show("L'anneau Qyx est : ",Qyx)
show("L'anneau QYX est : ",QYX)
print("L'anneau Qyx est : ",Qyx)
print("L'anneau QYX est : ",QYX)
```

L'anneau Qyx est : $\mathbf{Q}[x][y]$

L'anneau QYX est : $\mathbf{Q}[Y, X]$

```
("L'anneau Qyx est : ", Univariate Polynomial Ring in y over Univariate
Polynomial Ring in x over Rational Field)
("L'anneau QYX est : ", Multivariate Polynomial Ring in Y, X over Ration
al Field)
```

Remarque : (i) Les fonctions `print` et `show` ne donnent pas les mêmes informations. "show" est plus visuel, "print" est plus explicite.

(ii) Pour Sage, l'anneau $\mathbb{Q}[x][y]$ est à une seule variable, tandis que $\mathbb{Q}[Y, X]$ est multivarié. Les résultants ne vont pas se comporter de la même façon.

In [79]:
```
P=4*X-3*Y
P(1,0)
```

Out[79]: `-3`

(iii) L'ordre des variables, peu naturel ici, est important ! Si on pose $P = 4X - 3Y$ et que l'on calcule $P(1, 0)$, on tombe sur -3 car Y est la première variable et vaut 0 ici, tandis que X est la deuxième variable et vaut 1 ici.

b. Un résultant dans $\mathbb{Q}[x][y]$

In [80]:
```
p = y-x^2
q = y - x - 2
r=p.resultant(q)
show("Le polynome r appartient a l'anneau :\t ",r.parent())
```

Le polynome r appartient a l'anneau : $\mathbf{Q}[x]$

Puisque r est dans un anneau à une seule variable, on peut directement trouver ses racines à l'aide de la méthode `.roots()`,

In [81]:
```
r.roots()
```

Out[81]: `[(2, 1), (-1, 1)]`

On obtient une liste de couples : le premier élément du couple est la racine, le deuxième est sa multiplicité. Les racines de r sont donc 2 et -1.

c. Un résultant dans $\mathbb{Q}[Y, X]$

In [82]:
```
P = Y-X^2
Q = Y - X - 2
R=P.resultant(Q,Y)
show("Le polynome R appartient a l'anneau :\t ",R.parent())
```

Le polynome R appartient a l'anneau : $\mathbf{Q}[Y, X]$

Contarirement à la situation précédentes, le résultant est maintenant multivarié (ce qu'on ne pouvait pas forcément imaginer puisque le résultant en Y élimine l'indéterminée Y). C'est une des particularité à connaître de `Sage`. Si l'on cherche les racine de R, la méthode `roots()` ne fonctionne pas car un polynôme a plusieur variables n'a pas de racines.

Donnons des solutions alternatives :

La méthode `.factor()`

In [83]:
```
R.factor()
```

Out[83]: `(X - 2) * (X + 1)`

L'anneau R est factoriel et `Sage` peut factoriser R, ceci donne les racines.

Le passsage par une fonction à une seule variable

On définit une fonction $f(t) = R(0, t)$ (attention à l'ordre des variables ; X est la deuxième variable) , et on utilise la fonction `solve`. Pour définir une fonction, il suffit d'écrire $f(t) = \ldots$. `Sage` ajoute automatiquement 't' comme variable à l'anneau symbolique `SR` (Symbolic Ring). On aurait pu poser avant `var('t')`, mais c'est inutile.

In [84]:
```
f(t)=R(0,t)
show("a partir de la, t est une variable de SR : t.parent()=",t.parent())
show("l'objet f est une fonction :\t",f)
```

a partir de la, t est une variable de SR : t.parent()=SR

l'objet f est une fonction : $t \mapsto t^2 - t - 2$

Ayant définit f, on peut maintenant utiliser la fonction `solve` qui prend, comme premier attribuer, une liste d'équations, et comme attributs suivants, les variables dont on souhaite connaître la valeur :

In [85]:
```
show("Ensemble des solutions sans multiplicites :\t ",solve([f(t)==0],t))
show("Ensemble des solutions avec multiplicites :\t ",solve([f(t)==0],t,multiplicities=True))
```

Ensemble des solutions sans multiplicites : $[t = 2, t = (-1)]$

Ensemble des solutions avec multiplicites : $([t = 2, t = (-1)], [1, 1])$

Le passsage par un anneau de polynôme à une seule variable

On définit un anneau de polynôme supplémentaire $\mathbb{Q}[T]$, et on transforme le résultant multivarié R en un polynome en T en considérant la polynome $R_T = R(0, T)$. On pourra alors appliquer toutes les méthodes des polynômes à une seule variable sur R_T.

In [86]:
```
QT.<T>=QQ['T']
RT=R(0,T)
show("Le polynome RT est un element de :\t",RT.parent())
show("Les racines de RT avec multiplicites sont : \t",RT.roots())
```

Le polynome RT est un element de : $\mathbf{Q}[T]$

Les racines de RT avec multiplicites sont : $[(2, 1), (-1, 1)]$

Notons que la méthode `solve` ne marche pas avec des indéterminées de polynômes. En revanche, on peut considérer la fonction polynomiale définit par RT et utiliser la variable 't' implicitement définie plus haut :

In [87]:
```
solve([RT(t)==0],t)
```

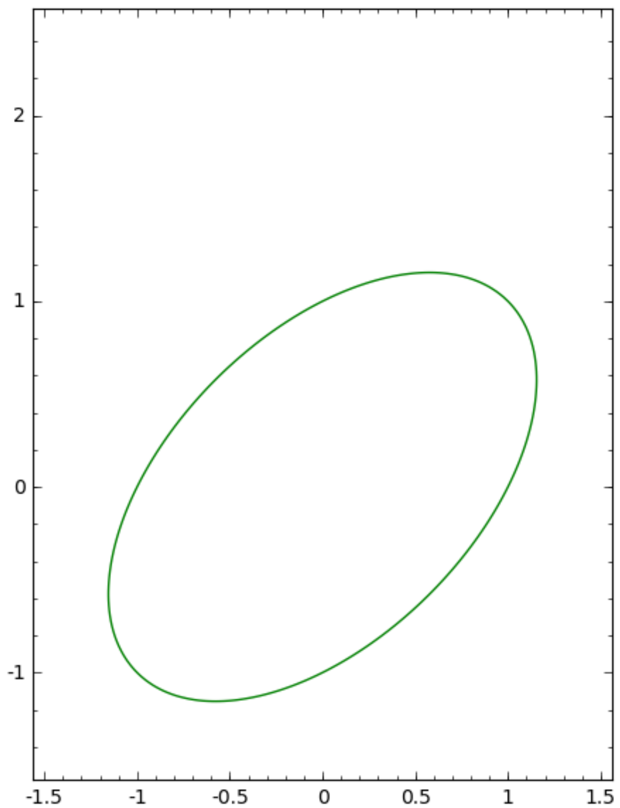
Out[87]: `[t == 2, t == -1]`

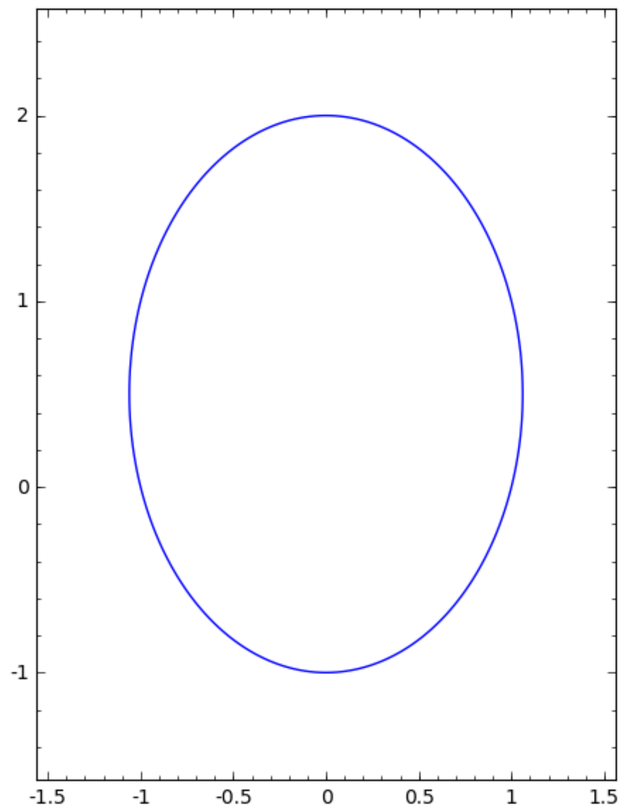
Exercice 2 : Élimination et representation graphique

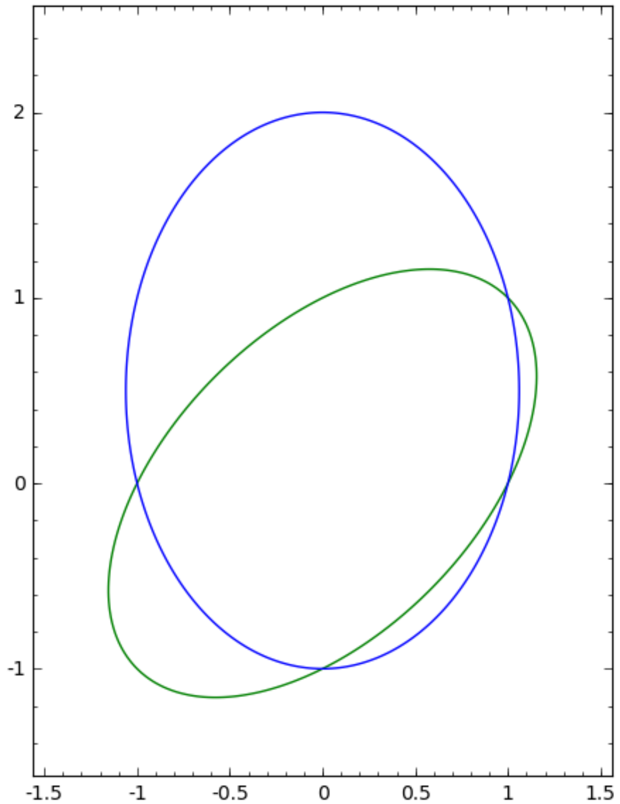
In [88]:
```
P = X^2 - X*Y + Y^2 - 1
Q = 2* X^2 + Y^2 - Y - 2
E1=implicit_plot(P(Y,X),(X,-1.5,1.5),(Y,-1.5,2.5),color="green")
E2=implicit_plot(Q(Y,X),(X,-1.5,1.5),(Y,-1.5,2.5),color="blue")
```

Voici le graphe des deux ellipses E_1 et E_2, puis le graphe de leur réunion :

In [89]:
```
show(E1)
show(E2)
show(E1+E2)
```


2
1
0
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5


2
1
0
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5




```
In [90]: RX=P.resultant(Q,Y)
         RY=P.resultant(Q,X)
         show("RX=",RX)
         show("RY=",RY)
```

RX=$3X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 3X$

RY=$3Y^4 - 3Y^2$

Transformons ces deux polynômes multivariés en des polynômes à une seule variable, en utilisant l'anneau $\mathbb{Q}[T]$ définit plus haut :

```
In [91]: RXT=RX(0,T)
         RYT=RY(T,0)
         show("RXT=",RXT)
         show("RYT=",RYT)
```

RXT=$3T^4 - 3T^3 - 3T^2 + 3T$

RYT=$3T^4 - 3T^2$

Plaçons les racines de RX et RY dans des listes ; nous n'avons pas besoin de la multiplicité ici, ce que l'on indique dans les options :

```
In [92]: RacinesRX=RXT.roots(multiplicities = False)
         RacinesRY=RYT.roots(multiplicities = False)
         show("Les racines de RX sont : \t", RacinesRX)
         show("Les racines de RY sont : \t", RacinesRY)
```

Les racines de RX sont : $[0, -1, 1]$

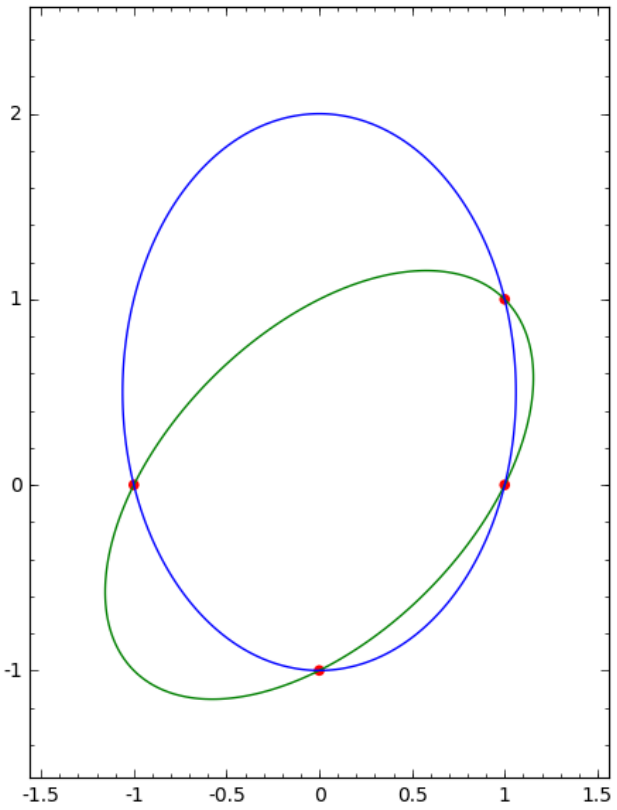
Les racines de RY sont : $[1, -1, 0]$

```
In [93]: Sol=[]
         for a in RacinesRX :
             for b in RacinesRY :
                 if (P(b,a)==0) and (Q(b,a)==0) :
                     Sol.append((a,b))
         show("L'ensemble des solutions du systeme est : ",Sol)
```

L'ensemble des solutions du systeme est : $[(0, -1), (-1, 0), (1, 1), (1, ($

In [94]:
```
PlotSol=point(Sol, color="red",size=30)
show("Placons ces points sur le graphe ci-dessus :")
show(E1+E2+PlotSol)
```

Placons ces points sur le graphe ci-dessus :

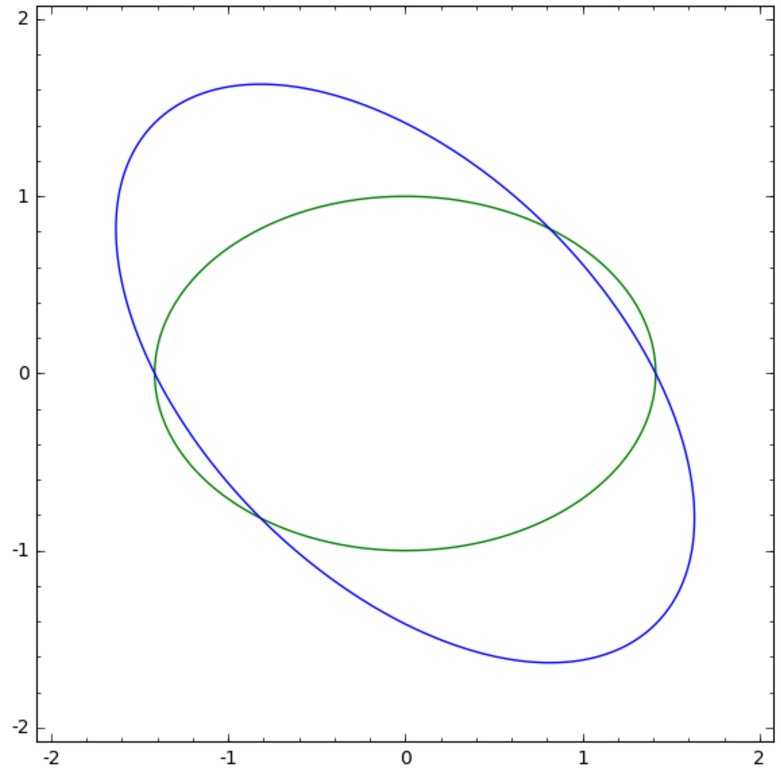


Exercice 2 : Deux autres ellipses

In [95]:
```
P = X^2 + 2*Y^2 - 2
Q = X^2 + X*Y + Y^2 - 2
E1=implicit_plot(P(Y,X),(X,-2,2),(Y,-2,2),color="green")
E2=implicit_plot(Q(Y,X),(X,-2,2),(Y,-2,2),color="blue")
```

Voici le graphe de la réunion des deux ellipses E_1 et E_2 :

In [96]:
```
show(E1+E2)
```



In [97]:
```
RX=P.resultant(Q,Y)
RY=P.resultant(Q,X)
show("RX=",RX)
show("RY=",RY)
RXT=RX(0,T)
RYT=RY(T,0)
RacinesRX=RXT.roots(multiplicities = False)
RacinesRY=RYT.roots(multiplicities = False)
show("Les racines de RX dans Q sont : \t", RacinesRX)
show("Les racines de RY dans Q sont : \t", RacinesRY)
```

RX=$3X^4 - 8X^2 + 4$

RY=$3Y^4 - 2Y^2$

Les racines de RX dans Q sont : $[]$

Les racines de RY dans Q sont : $[0]$

Dans $\mathbb{Q}$, on voit que RX et RY n'ont pas assez de racines rationnelles. On pourrait chercher ses racines dans une extensions en nombres flottants comme RR ou CC :

In [98]:
```
show("Les racines de RX dans RR sont :\t",RXT.roots(RR,multiplicities=False))
show("Les racines de RY dans RR sont :\t",RYT.roots(RR,multiplicities=False))
```

Les racines de RX dans RR sont : $[-1.41421356237310, -0.81649658092$

Les racines de RY dans RR sont : $[-0.816496580927726, 0.00000000000$

Ceci ne nous aide pas à trouver les racines exactes. Essayons de factoriser le polynôme dans $\mathbb{Q}$:

In [99]:
```
show("Dans Q, le polynome RX se factorise en :\t",RX.factor())
show("Dans Q, le polynome RY se factorise en :\t",RY.factor())
```

Dans Q, le polynome RX se factorise en : $(X^2-2)\cdot(3X^2-2)$

Dans Q, le polynome RY se factorise en : $Y^2\cdot(3Y^2-2)$

Cette fois, on se rend compte que les racines exactes peuvent être trouvées dans l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ (c'est la plus petite extension possible puisqu'elle doit contenir $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2/3}$). C'est aussi l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$.

In [100]:
```
K1=QQ[sqrt(2),sqrt(3)]
show("L'extension K1 de Q est : K1=\t",K1)
Racines1RX=RXT.roots(K1,multiplicities = False)
Racines1RY=RYT.roots(K1,multiplicities = False)
show("Les racines de RX dans K1 sont : \t", Racines1RX)
show("Les racines de RY dans K1 sont : \t", Racines1RY)
#
K2=QQ[sqrt(2)+sqrt(3)]
show("L'extension K2 de Q est : K2=\t",K2)
Racines2RX=RXT.roots(K2,multiplicities = False)
Racines2RY=RYT.roots(K2,multiplicities = False)
show("Les racines de RX dans K2 sont : \t", Racines2RX)
show("Les racines de RY dans K2 sont : \t", Racines2RY)
```

L'extension K1 de Q est : K1= $(\mathbf{Q}[sqrt_3]/(sqrt_3^2-3))[sqrt_2]/(sqrt_2^2-2)$

Les racines de RX dans K1 sont : $\left[-\frac{1}{3}sqrt_3 sqrt_2, \frac{1}{3}sqrt_3 sqrt_2, sqrt_2, -s\right.$

Les racines de RY dans K1 sont : $\left[-\frac{1}{3}sqrt_3 sqrt_2, \frac{1}{3}sqrt_3 sqrt_2, 0\right]$

L'extension K2 de Q est : K2= $\mathbf{Q}[a]/(a^4-10a^2+1)$

Les racines de RX dans K2 sont : $\left[\frac{1}{2}a^3-\frac{9}{2}a, \frac{1}{6}a^2-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}a^2+\frac{5}{6}, -\right.$

Les racines de RY dans K2 sont : $\left[\frac{1}{6}a^2-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}a^2+\frac{5}{6}, 0\right]$

In [101]:
```
Sol1=[]
for a in Racines1RX :
    for b in Racines1RY :
        if (P(b,a)==0) and (Q(b,a)==0) :
            Sol1.append((a,b))
show("L'ensemble des solutions du systeme dans K1 est : Sol1=",Sol1)
Sol2=[]
for a in Racines2RX :
    for b in Racines2RY :
        if (P(b,a)==0) and (Q(b,a)==0) :
            Sol2.append((a,b))
show("L'ensemble des solutions du systeme dans K2 est : Sol2=",Sol2)
```

L'ensemble des solutions du systeme dans K1 est : Sol1= $\left[\left(-\frac{1}{3}sqrt\right.\right.$

$\left.(sqrt_2, 0), (-sqrt_2, 0)\right]$

L'ensemble des solutions du systeme dans K2 est : Sol2= $\left[\left(\frac{1}{2}a^3 - \right.\right.$

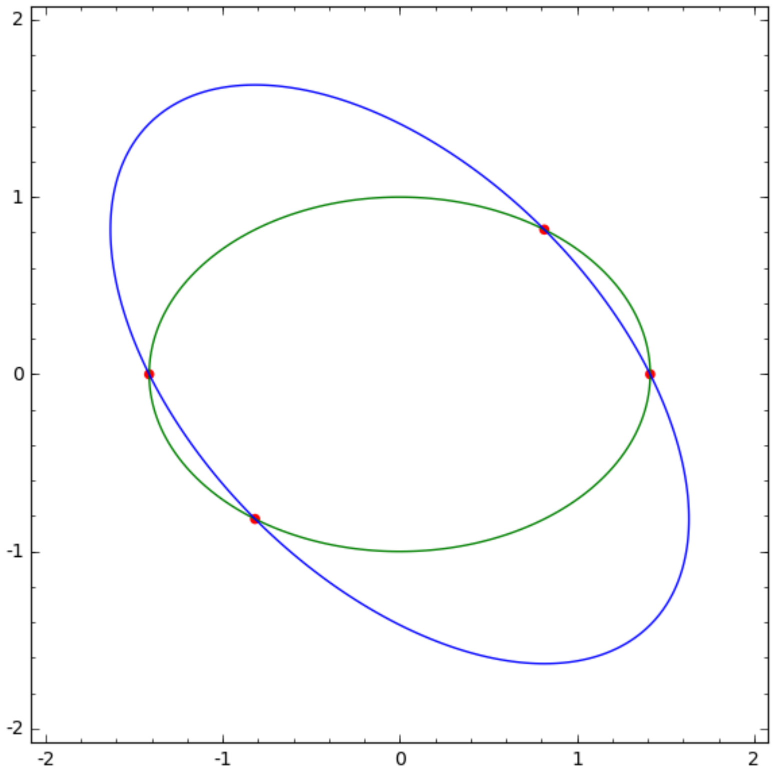
$\left.\left(-\frac{1}{6}a^2+\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}a^2+\frac{5}{6}\right), \left(-\frac{1}{2}a^3+\frac{9}{2}a, 0\right)\right]$

Les deux ensembles de solutions sont bien les mêmes. Le premier ensemble est plus agréables à lire pour nous. En revanche, `Sage` ne connaît $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ qu'au signe près, et ne parvient pas à tracer l'ensemble des solutions Sol1.

Pour placer les points solutions dans le graphe, on va donc utiliser Sol2 :

In [102]:
```
PlotSol2=point(Sol2, color="red",size=30)
show("Graphe des ellipses et des points solutions :")
show(E1+E2+PlotSol2)
```

Graphe des ellipses et des points solutions :



Exercice 4 : Parapluie de Whitney

In [103]:
```
R.<x,y,z,u,v>=QQ['x,y,z,u,v']
P1=x-u*v
P2=y-v
P3=z-u^2
R1=P1.resultant(P2,v)
R2=P3.resultant(R1,u)
```

In [104]:
```
show("Le deuxième resultant est : R2=",R2)
```

PGh0bWw+PHNjcmlwdCB0eXBlPSJtYXRoL3RleDsgbW9kZT1kaXNwbGF5Ij5cbmV3Y29tb

Exercice 5 : Une courbe paramétrée

In [105]:
```
R.<x,y,t>=QQ['x,y,t']
P1=x-(t^2+t+1)
P2=(t^2+1)*y-(t^2-1)
R=P1.resultant(P2,t)
```

In [106]:
```
R.factor()
```

Out[106]: `x^2*y^2 - 2*x^2*y + x^2 + 4*x*y + y^2 - 4*x + 3`

Supposons que (x, y) est un point de $\mathbb{R}^2$ tel que $R(x, y) = 0$. Existe-t-il un $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = t^2 + t + 1, \quad y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad ?$$

Si un tel t existe, on va avoir : $t^2 = x - t - 1$ et donc

$$(x - t - 1 + 1)y = (x - t - 1 - 1) \iff xy - ty = x - t - 2 \iff x(y - 1) + 2 = t(y - 1)$$

Supposons que $y = 1$: Puisque $R(x, 1) = 0$, on a :

$$R(x, 1) = x^2 - 2x^2 + x^2 + 4x + 1^2 - 4x + 3 = 4 = 0 : \text{contradiction.}$$

Nécessairement $y \neq 1$. Posons $t = x + \frac{2}{y-1} = \frac{xy-x+2}{y-1}$.

Nous allons maintenant nous assurer que ce choix de t convient en vérifiant que $P_1(x, y, t) = 0$, $P_2(x, y, t) = 0$ lorsque $R(x, y) = 0$.

In [107]:
```
P1(x,y,(x*y-x+2)/(y-1))+R(x,y,t)/((y-1)^2)
```

Out[107]: `0`

In [108]:
```
P2(x,y,(x*y-x+2)/(y-1))-R(x,y,t)/(y-1)
```

Out[108]: `0`

En conclusion, l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $f(t) = \left(t^2 + t + 1, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$ est exactement la courbe d'équation $R(x, y) = x^2y^2 - 2x^2y + x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 3 = 0$.

Exercice 6 : Formule de Héron

Les trois relations sont, en appliquant le théorème de Pythagore et en notant A l'aire du triangle :

$$A = \frac{ay}{2}$$
$$c^2 = x^2 + y^2$$
$$b^2 = (a - x)^2 + y^2$$

On va définir trois polynômes dans l'anneau $\mathbb{Q}[A, a, b, c, x, y]$ et éliminer x et y :

In [109]:
```
Ring.<A,a,b,c,x,y>=QQ['A,a,b,c,x,y']
P1=2*A-a*y
P2=c^2-x^2-y^2
P3=b^2-(a-x)^2-y^2
R1=P2.resultant(P3,x)
R2=P1.resultant(R1,y)
```

```
In [110]: R2.factor()
```

```
Out[110]: a^2 * (a^4 - 2*a^2*b^2 + b^4 - 2*a^2*c^2 - 2*b^2*c^2 + c^4 + 16*A^2)
```

Ainsi, si A, a, b, c, x, y sont définis comme dans l'énoncé, et en supposant que $a^2 \neq 0$, on a la relation :

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4 + 16A^2 = 0$$

c'est à dire :

$$A^2 = \frac{1}{16}(-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4)$$

Il nous reste à factoriser le terme de droite :

```
In [111]: D=-a^4 + 2*a^2*b^2 - b^4 + 2*a^2*c^2 + 2*b^2*c^2 - c^4
          D.factor()
```

```
Out[111]: (-1) * (-a + b - c) * (-a + b + c) * (a + b - c) * (a + b + c)
```

On obtient bien la formule recherchée.

Exercice 7 : Fenêtre de Viviani

```
In [112]: Ring.<x,y,z>=QQ['x,y,z']
          P1=x^2+y^2+z^2 - 1
          P2=x^2-x+y^2
          Rxy=P1.resultant(P2,z)
          Rxz=P1.resultant(P2,y)
          Ryz=P1.resultant(P2,x)
```

Dans cet exercice, on tombe sur un bug classique de Sage : les composantes algébriques de multiplicité paire n'apparaisse pas quand on les trace avec `implicit_plot`. Il faut donc factoriser le polynôme et enlever l'exposant pour pouvoir tracer la courbe implicite.

```
In [113]: show("Le polynome Rxy vaut : Rxy=",Rxy)
          show("Le polynome Rxy factorise vaut : Rxy.factor()=",Rxy.factor())
          show("On pose rxy=x^2+y^2-x")
          rxy=x^2+y^2-x
```

Le polynome Rxy vaut : Rxy=$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2$

Le polynome Rxy factorise vaut : Rxy.factor()=$(x^2 + y^2 - x)^2$

On pose rxy=x^2+y^2-x

```
In [114]: show("Le polynome Rxz vaut : Rxz=",Rxz)
          show("Le polynome Rxz factorise vaut : Rxz.factor()=",Rxz.factor())
          show("On pose rxz=z^2+x-1")
          rxz=z^2+x-1
```

Le polynome Rxz vaut : Rxz=$z^4 + 2xz^2 + x^2 - 2z^2 - 2x + 1$

Le polynome Rxz factorise vaut : Rxz.factor()=$(z^2 + x - 1)^2$

On pose rxz=z^2+x-1

```
In [115]: show("Le polynome Ryz vaut : Ryz=",Ryz)
          show("Le polynome Ryz factorise vaut : Ryz.factor()=",Ryz.factor())
          show("Pas de composante multiple. On ne change rien et on pose ryz=Ryz")
          ryz=Ryz
```

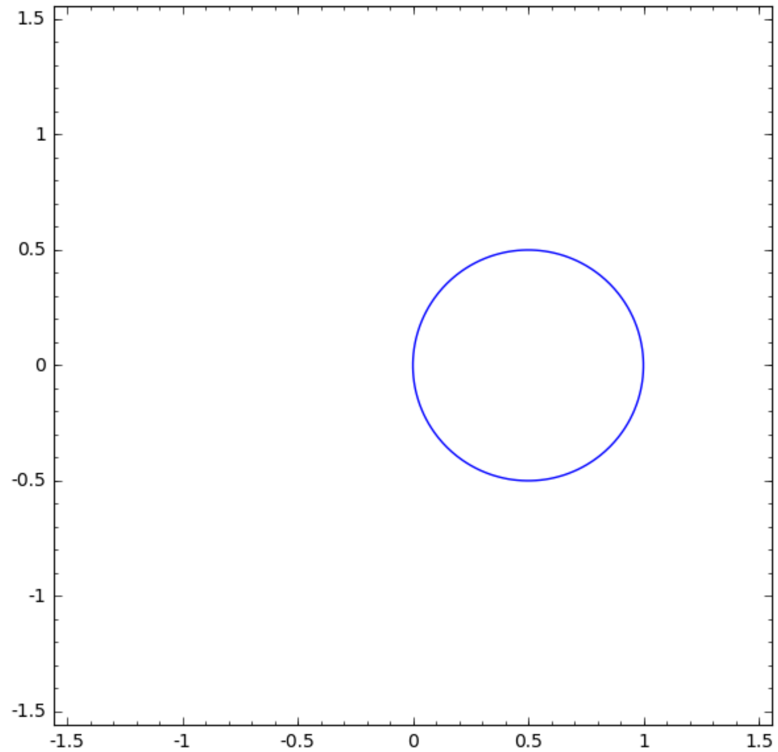
Le polynome Ryz vaut : Ryz=$z^4 + y^2 - z^2$

Le polynome Ryz factorise vaut : Ryz.factor()=$(z^4 + y^2 - z^2)$

Pas de composante multiple. On ne change rien et on pose ryz=Ryz

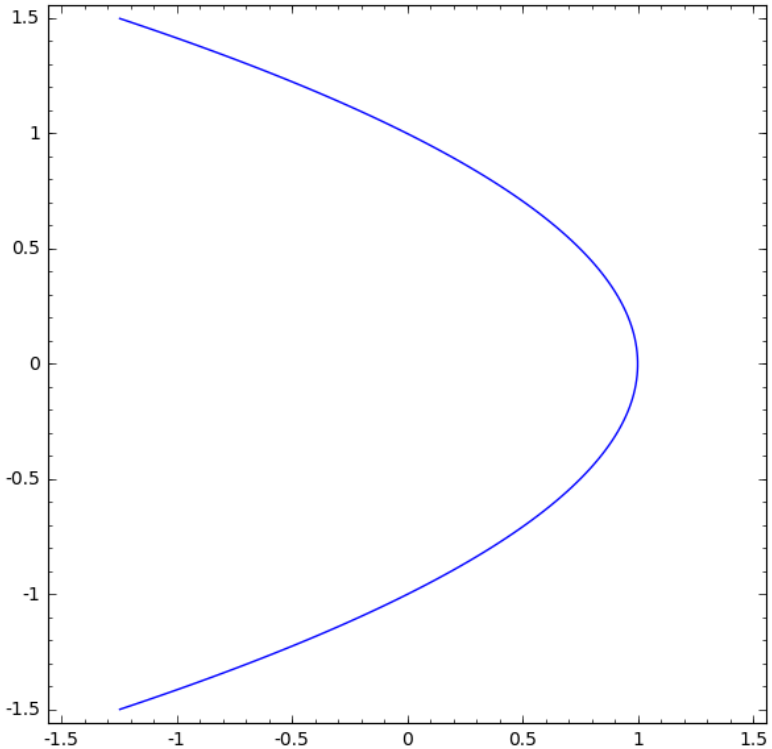
```
In [116]: fxy(s,t)=rxy(s,t,0)
          Exy=implicit_plot(fxy(s,t),[s,-1.5,1.5],[t,-1.5,1.5])
          Exy
```

Out[116]:



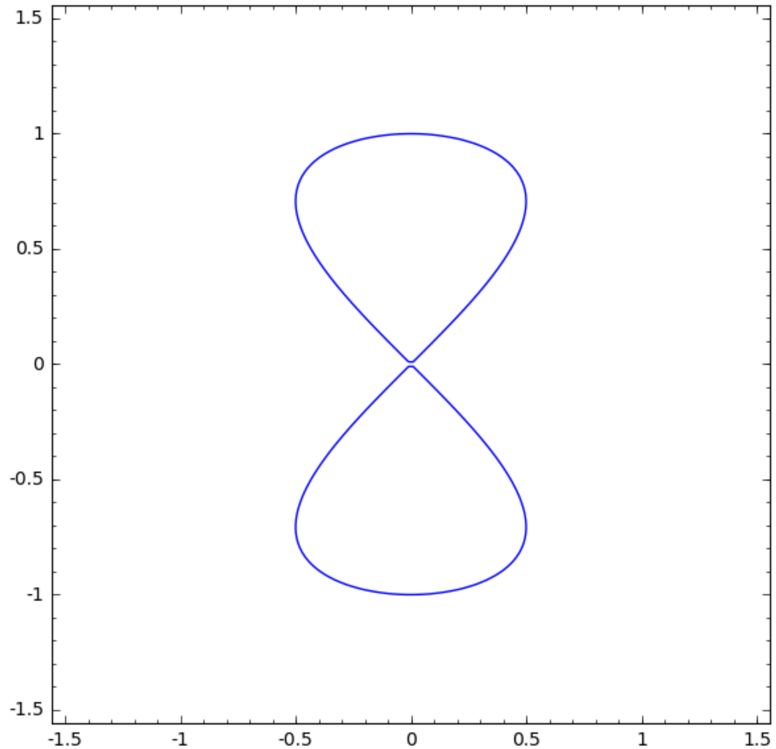
In [117]:
```
fxz(s,t)=rxz(s,0,t)
Exz=implicit_plot(fxz(s,t),[s,-1.5,1.5],[t,-1.5,1.5])
Exz
```

Out[117]:



In [118]:
```
fyz(s,t)=ryz(0,s,t)
Eyz=implicit_plot(fyz(s,t),[s,-1.5,1.5],[t,-1.5,1.5])
Eyz
```

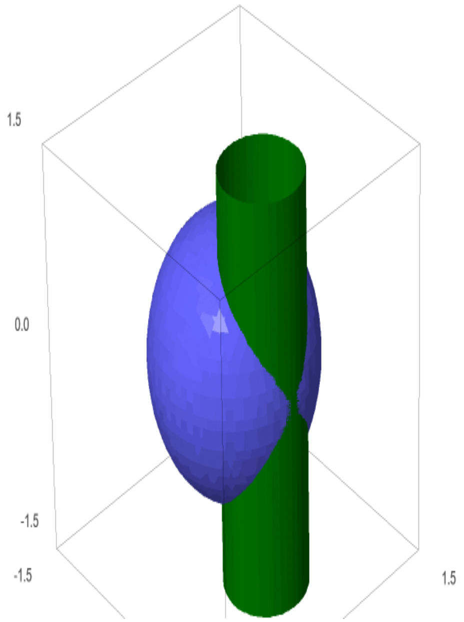
Out[118]:



In [119]:
```
S1=implicit_plot3d(P1(x,y,z),[x,-1.5,1.5],[y,-1.5,1.5],[z,-1.5,1.5])
S2=implicit_plot3d(P2(x,y,z),[x,-1.5,1.5],[y,-1.5,1.5],[z,-1.5,1.5],color
="green",smooth=True)
```

```
In [120]: S1+S2
```

```
Out[120]:
```



Pour $R_{x,z}$ on remarque que la courbe donnée par le résultant possède deux branches infinies, qui ne figurent pas sur l'intersection en 3 dimension du cylindre et de la sphère. En effet, toute les solutions "sous-entendues" par le résultant correspondent à des points d'intersectionss (x, y, z) où x, z seraient réels, mais y serait un nombre complexe non réel. On ne peut donc pas voir ce triplet dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 : Extensions algébriques

a. Échauffement

On considère les polynômes minimaux f, g comme éléments de l'anneau de polynôme $\mathbb{Q}[t]$. Par définition de f et g, on a $f(\alpha) = 0$ et $g(\beta) = 0$. Posons $a = \alpha + \beta$ et $b = \beta$, on a donc

$$f(a - b) = f(\alpha + \beta - \beta) = 0, \quad g(b) = g(\beta) = 0.$$

b. Résultant

Posons $F = f(x - y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ et $G = g(y) \in \mathbb{Q}[x, y]$. Remarquons que $\deg_y F = \deg f$ et $\deg_y G = \deg g$. On pose

$$R = \mathrm{Res}_y(F, G) \in \mathbb{Q}[x]$$

D'après les propriétés du résultants, il existe deux polynômes u, v en x, y, tels que que $\deg_y U < \deg_y G = \deg g$ et $\deg_y v < \deg_y f(x - y) = \deg f$ tels que :

$$u(x, y)f(x - y) + v(x, y)g(y) = r(x)$$

Soit $\gamma \in \mathbb{C}$.

- S'il existe α', β' tels que $\gamma = \alpha' + \beta'$, $g(\beta') =$ et $f(\alpha') = 0$ alors, en posant $x = \alpha' + \beta'$ et $y = \beta'$ dans l'égalité ci dessus, on voit que $r(\gamma) = 0$.

- Réciproquement, si γ est une racine de r, on a :
  $U(\gamma, y)F(\gamma, y) + V(\gamma, y)G(\gamma, y) = r(\gamma) = 0 \qquad \text{donc} \qquad U(\gamma, y)F(\gamma, y) = -V(\gamma, y)G(\gamma,$
  Notons $D \in \mathbb{Q}[\gamma][y]$ le pgcd de $F(\gamma, y)$ et $G(\gamma, y)$ dans l'anneau $\mathbb{Q}[\gamma][y]$. Le pgcd D ne peut-être de degré zéro car $\deg_y U < \deg_y G$ et $\deg_y V < \deg_y F$. Soit β' une racine de $D \in \mathbb{Q}[\gamma][y]$, on a forcément $g(\beta') = 0$ et $f(\gamma - \beta') = 0$. Il suffit alors de poser $\alpha' = \gamma - \beta'$.

Ce qui précède montre que le polynôme minimal de $\al + \beta$ divise r. En revanche, il n'est pas toujours égal comme le montre l'exemple ajouté ci-dessous.

c. Polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Le polynôme minimal de $\sqrt{2}$ est $f(t) = t^2 - 2$. Le polynôme minimal de $\sqrt{3}$ est $g(t) = t^2 - 3$. On calcule ensuite avec `Sage`

```
In [121]: Rt.<t>=QQ['t']
Rxy.<x,y>=QQ['x,y']
f=t^2-2
g=t^2-3
F=f(x-y)
G=g(y)
R=F.resultant(G,y)
show("Le polynome F vaut : F=",F)
show("Le polynome G vaut : G=",G)
show("Le resultant de F et G par rapport a y vaut : R=",R)
show("On verifie que R(sqrt(2)+sqrt(3))=",R(sqrt(2)+sqrt(3),0).expand())
```

Le polynome F vaut : F=$x^2 - 2xy + y^2 - 2$

Le polynome G vaut : G=$y^2 - 3$

Le resultant de F et G par rapport a y vaut : R=$x^4 - 10x^2 + 1$

On verifie que R(sqrt(2)+sqrt(3))=0

Soit P le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. D'après ce qu'il précède, P divise $R = t^4 - 10t^2 + 1$. Mais, si $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$, K contient aussi $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$, donc $\sqrt{6}$ puis, $\sqrt{6}.(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$. Le résolution d'un système linéaire à coefficients rationnels montre que K contient $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. On en déduit aisément que le degré de l'extension $\mathbb{Q} \subset K$ vaut 4, donc le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est $R = x^4 - 10x^2 + 1$.

d. Contre-exemple : polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$

Le polynôme minimal de $\sqrt{2}$ est $f(t) = t^2 - 2$. Le polynôme minimal de $\sqrt[4]{2}$ est $g(t) = t^4 - 2$. On calcule ensuite avec Sage

```
In [122]: Rt.<t>=QQ['t']
Rxy.<x,y>=QQ['x,y']
f=t^2-2
g=t^4-2
F=f(x-y)
G=g(y)
R=F.resultant(G,y)
show("Le polynome F vaut : F=",F)
show("Le polynome G vaut : G=",G)
show("Le resultant de F et G par rapport a y vaut : R=",R)
show("On verifie que R(2^(1/2)+2^(1/4)=",R(2^(1/2)+2^(1/4),0).expand())
show("En revanche, R n'est pas irreductible : R.factor()=",R.factor())
```

Le polynome F vaut : F=$x^2 - 2xy + y^2 - 2$

Le polynome G vaut : G=$y^4 - 2$

Le resultant de F et G par rapport a y vaut : R=$x^8 - 8x^6 + 20x^4 -$

On verifie que R(2^(1/2)+2^(1/4)=0

En revanche, R n'est pas irreductible : R.factor()=$(x^4 - 4x^2 - 8x$

Le polynôme miniminal de $a = \sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ peut-être obtenu à l'aide de la méthode ".minpol()" :

```
In [124]: a=2^(1/2)+2^(1/4)
a.minpoly()

Out[124]: x^4 - 4*x^2 - 8*x + 2
```