Agrégation- 2023/2024

Option C
Thierry Mignon
thierry.mignon@umontpellier.fr
Mars 2024

TP n°3 : Résultant et élimination

Exercice 1. *La méthode* `resultant`
Le calcul du résultant de deux polynômes P et Q en la variable X (noté $Res(P, Q, X)$ en cours) s'effectue à l'aide de la méthode :

`P.resultant(Q)` pour des polynômes à une seule variable sur un anneau quelconque.
ou `P.resultant(Q,X)` pour préciser la variable choisie s'il y a plusieurs possibilités.

Le résultat obtenu diffère selon la façon dont sont définis P et Q. En particulier, pour `SAGE`, les anneaux $K[X, Y]$ et $K[X][Y]$ se comportent différemment.

(1) Définir dans `SAGE` les anneaux

```
Qx.<x>=QQ['x']
Qyx.<y>=Qx['y']
QYX.<Y,X>=QQ['Y','X']
```

Afficher et comparer les anneaux `Qyx` et `QYX`.

(2) Définir les polynômes

$$p = y - x^2$$
$$q = y - x - 2,$$

et calculer `r=p.resultant(q)`. (p et p sont des polynômes à une seule variable, `y`, sur `Qx`).

Trouver à quel anneau appartient r à l'aide de la méthode `parent()`. Trouver les racines de r à l'aide la méthode `r.roots()`.

(3) Définir les polynômes

$$P = Y - X^2$$
$$Q = Y - X - 2,$$

et calculer `R=P.resultant(Q,Y)`. (P et Q sont des polynômes à deux variables, `X,Y`, sur `QQ`).

Trouver à quel anneau appartient R à l'aide de la méthode `parent()`. Peut-on trouver les racines de R à l'aide la méthode `R.roots()` ?

Trouver les racines de R à l'aide de la fonction `solve` (en définissant par exemple une fonction $f(t) = R(0, t)$) ou de la méthode `factor`.

Exercice 2. *Élimination et représentation graphique*

On considère les polynômes sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} P &= X^2 - XY + Y^2 - 1 \\ Q &= 2X^2 + Y^2 - Y - 2 \end{aligned}$$

(1) A l'aide de la commande `implicit_plot` Tracer les ellipses E_1 et E_2 d'équations $P = 0$, $Q = 0$, ainsi que leur réunion.

(2) Soit RX le résultant de P et Q par rapport à la variable Y et RY le résultant de P et Q par rapport à la variable X. Trouver les racines de RX et RY.

(3) En déduire l'ensemble des points d'intersections de E_1 et E_2. Vérifier ce résultat sur le graphique.

Exercice 3. On définit les polynômes suivants sur $\mathbb{Q}$:

$$P = X^2 + 2Y^2 - 2, \qquad Q = X^2 + XY + Y^2 - 2$$

(1) Tracer la réunion des courbes d'équations $P = 0$ et $Q = 0$.

(2) Calculer les résultants de P et Q par rapport à X et Y. Les factoriser.

(3) Trouver *graphiquement*, et à l'aide de la question précédente, l'ensemble des solutions complexes du système :

$$\begin{cases} P(X,Y) = 0 \\ Q(X,Y) = 0 \end{cases}$$

Quelle est la plus petite extension algébrique de $\mathbb{Q}$ sur laquelle on trouve toutes les solutions ?

Exercice 4. *Parapluie de Whitney*

(1) A l'aide de deux résultants, déterminer l'équation cartésienne de la surface paramétrée :

$$\begin{cases} x &= uv \\ y &= v \\ z &= u^2 \end{cases}$$

(2) Tous les points qui satisfont à l'équation cartésienne proviennent-ils de la surface de départ ?

Exercice 5.

(1) Trouver l'équation de la courbe paramétrée :

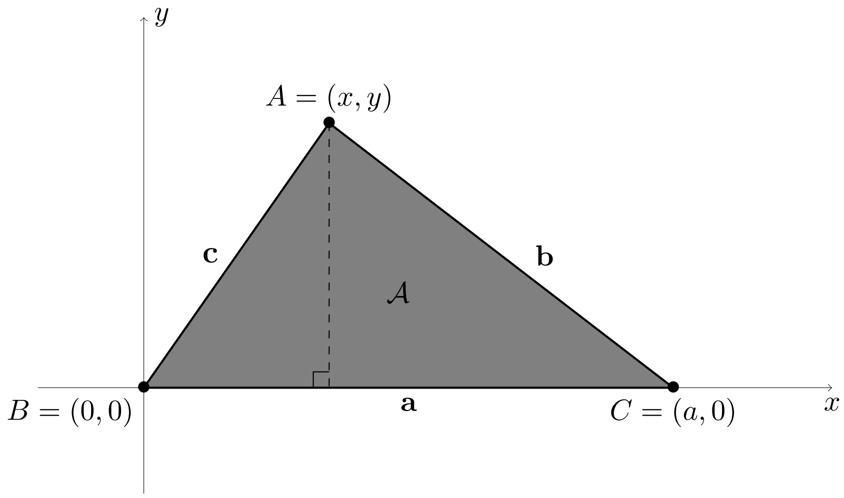
$$\begin{cases} x &= t^2 + t + 1 \\ y &= \frac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$$

(2) Tracer cette courbe

(3) Tous les points qui satisfont à l'équation cartésienne appartiennent-ils à la courbe paramétrée ?

Exercice 6. *Formule de Héron*

On se donne un triangle d'aire $\mathcal{A}$ et de longueurs de côtés a, b, c, disposé de la façon suivante dans un repère orthonormé :



1. Trouver un système de trois équations algébriques qui relient $a, b, c, x, y, \mathcal{A}$

2. En calculant deux résultants, montrer la formule de Héron, qui exprime l'aire d'un triangle en fonction des longueurs des cotés :

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{16}(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)$$

Exercice 7. *Fenêtre de Viviani*

On appelle fenêtre de Viviani l'intersection de la sphère $x^2+y^2+z^2 = 1$ et du cylindre $x^2-x+y^2 = 0$. Tracer ses projections sur les trois plans de coordonnées. (Il s'agit d'éliminer x, d'où une courbe dans le plan des y, z ; et ainsi de suite.)

Exercice 8.

Soient α, β deux nombres algébriques. Soient f, g leurs polynômes minimaux. Comment trouver le polynôme minimal de $\alpha + \beta$?

(1) Montrer que $(\alpha + \beta, \beta)$ est dans les solutions de $f(x - y) = 0$ et $g(y) = 0$.

(2) Montrer que γ est une racine de $Res(f(x - y), g(y), y)$ si et seulement si il existe α, β tels que $\gamma = \alpha + \beta$ et $f(\alpha) = 0$ et $g(\beta) = 0$.

(3) Quels est le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?