Agrégation - 2024

Préparation à l'épreuve orale, Option C
Thierry Mignon
thierry.mignon@umontpellier.fr
Mars 2024

Travaux Pratiques : Interpolation, évaluation

Exercice 1. *Méthode de Hörner*

Définir un anneau de polynôme A.<X>=QQ['X']. On souhaite évaluer un polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in A$ en un point $x \in \mathbb{Q}$.

(1) La méthode d'évaluation classique consiste à calculer la liste des puissances x^n puis la combinaison linéaire $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.

Calculer le nombre d'opération nécessaire pour cette méthode d'évaluation ; écrire une procédure :

`eval_classique(P,x)` :

- **Entrée :** P=$a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in$ A, x$\in \mathbb{Q}$
- **Sortie :** Le rationnel `P(x)` calculé de manière usuelle.

(2) La méthode (ou schéma) de Hörner consiste à écrire :

$$P(x) = ((\cdots(a_n.x + a_{n-1}).x + a_{n-2}).x + \cdots + a_1).x + a_0)$$

Calculer le nombre d'opération nécessaire pour la méthode de Hörner ; Écrire une procédure :

`eval_Horner(P,x)` :

- **Entrée :** P=$a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in$ A, x$\in \mathbb{Q}$
- **Sortie :** Le rationnel `P(x)` calculé par la méthode de Hörner.

Exercice 2. *Interpolation de Lagrange, majoration de l'erreur*

On souhaite utiliser l'interpolation de Lagrange pour approcher une fonction f définie sur un intervalle I par un polynôme.

(1) A l'aide de la méthode `A.lagrange_polynomial()`, écrire une procédure

`interpolation_Lagrange(f,L)` :

- **Entrée :** Une fonction f définie sur un intervalle I, une liste `L=[`$x_0, \dots, x_n$`]` de points de I.
- **Sortie :** L'unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n valant $f(x_i)$ en les $n+1$ points x_i.

(2) On pose $I = [-1, 1]$ et on considère la suite $(x_0, \dots, x_n)$ de points de $[-1, 1]$ équidistants et tels que $x_0 = -1, x_n = 1$. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f\ : [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{16x^2+1} \end{aligned}$$

Représenter sur un même graphe la fonction f et le polynôme interpolant f en les x_i pour $n = 1, 3, 5, 10, 20, 30$.

Est ce que le fait d'augmenter le nombre de points d'interpolation augmente la qualité de l'approximation ? Ce type de situation est appelé *phénomène de Runge.*

(3) On souhaite majorer l'erreur

$$\|f - P_n\|_\infty = \max\{|f(x) - P_n(x)|, x \in [-1, 1]\}$$

obtenue en remplaçant f par son polynôme d'interpolation en les n points x_i.

Démontrer la proposition suivante :

Proposition 0.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0, \dots, x_n$ des points deux à deux distincts de I. Soit P_n le polynôme de degré inférieur ou égal à n interpolant f en les x_i. Alors pour tout $x \in I$, on a*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \left(\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \right) \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}.$$

Indices : Remplacer f par $f - P_n$, supposer x différents des x_i et considérer la fonction

$$g(t) = f(t) - \lambda(t - x_0) \cdots (t - x_n), \qquad \text{où } \lambda = \frac{f(x)}{(x - x_0) \cdots (x - x_n)}$$

Montrer que g s'annule en $(n+2)$ points et appliquer Rolle à g et ses dérivées successives pour en déduire que $g^{(n+1)}$ s'annule en un point ζ de I. Conclure.

(4) Tracer les graphes de f et $f^{(n)}$ pour $n = 1, \dots, 5$. Est-ce cohérent avec le phénomène de Runge observé plus haut ?

Exercice 3. *Amélioration de l'approximation par les points de Tchebychev*

Au vu de la proposition 0.1, on peut améliorer l'erreur commise en diminuant la valeur $\prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$.

On admet la proposition/définition suivante :

Definition 0.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$. C'est le n-ième polynôme de Tchebychev.*

(1) Montrer que la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi définit par la propriété suivante :

$$\begin{cases} T_0 & = 1 \\ T_1 & = X \\ T_{n+2} & = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

Montrer que les zéros de T_n sont les $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $0 \leq k \leq n-1$, appelés points de Tchebychev, et son coefficient dominant est 2^{n-1} (sauf pour $n = 0$).

(2) Montrer le point (i) de la proposition suivante (on admet le point (ii)).

Proposition 0.3. (i) *Soit $x_0, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ les points de Tchebychev ci-dessus. Alors*

$$||(x - x_0) \cdots (x - x_n)||_\infty = 2^{-n}.$$

(ii) *Pour tout polynôme unitaire de degré $n+1$, on a $||Q||_\infty \geq 2^{-n}$.*

En déduire que les meilleurs points d'interpolation sont les points de Tchebychev.

(3) Écrire une procédure

`interpolation_Tchebychev(f,n)` :

- **Entrée :** Une fonction f définie sur $[-1, 1]$, un entier n.
- **Sortie :** L'unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n valant $f(x_i)$ en les points de Tchebychev x_i.

Représenter sur un même graphe la fonction f de l'exercice 2 et les polynômes d'interpolations ci-dessus pour $n = 10, 20, \ldots$.

Exercice 4. *Interpolation par différences finies*

Definition 0.4. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on note $\Delta(f)$ la fonction définie par $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$*

(1) Montrer la proposition suivante :

Proposition 0.5. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) \leq n$. On pose $P_0 = 1$ et, pour $1 \leq k \leq n-1$: $P_k = \frac{1}{k!}X(X-1)\cdots(X-k+1)$. On a l'égalité :*

$$P = P(0) + \Delta P(0).P_1 + \Delta^2 P(0).P_2 + \cdots + \Delta^n P(0).P_n$$

Indices : Montrer que $\Delta P_0 = 0$ et $\Delta P_k = P_{k-1}$. Pourquoi cela suffit-il à montrer la proposition ?

(2) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$P = f(0) + \Delta f(0).P_1 + \Delta^2 f(0).P_2 + \cdots + \Delta^n f(0).P_n$$

Montrer que P est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n coïncidant avec f en $0, 1, \ldots, n$.

(3) Écrire, en utilisant les formules précédentes, une procédure :

`interpolation_diffinies(f,n)` :

- **Entrée :** Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, un entier n.
- **Sortie :** L'unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n valant $f(i)$ en les points $0, \ldots, n$.

(4) A l'aide de la fonction `timeit` comparer les vitesses de calculs de `interpolation_diffinies(cos(x),n)` et `interpolation_Lagrange(cos(x),[0,1,...,n])` pour n grand.

Commentaires ?