Correction du Devoir Maison

On considère la suite de fonction $S_n : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}.$$

(a) Montrer que la suite (S_n) converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera S.

On remarque que pour tout $n \geq 1$,

$$S_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} = \frac{1}{x} - 2x \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - x^2} \right).$$

Sachant que $\frac{1}{k^2-x^2} \sim \frac{1}{k^2}$ lorsque $k \to \infty$, et que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente, on peut conclure que $(S_n(x))$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a, b]$ contenu dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soit $N \in \mathbb{Z}$ tel que $[a, b] \subset]N, N + 1[$. On remarque que pour tout $x \in [a, b]$, $|x| \leq |N| + 1$, ainsi

$$\sup_{x\in[a,b]} \mid \frac{2x}{k^2 - x^2} \mid \leq \frac{2(|N| + 1)}{k^2 - (|N| + 1)^2}$$

pour tout $k \geq |N| + 2$. Comme la série $\sum_{k\geq|N|+2} \frac{2(|N|+1)}{k^2-(|N|+1)^2}$ converge, on a montré la convergence normale (donc uniforme) de la suite $(S_n(x))$ sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(c) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.

Comme S est une limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ de fonctions continues, elle est continue.

On remarque pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$S_n(-x) = -S_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite sur n, on obtient $S(-x) = -S(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: S est une fonction impaire.

On remarque pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$S_n(x + 1) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k+1} = S_n(x) + \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite sur n, on obtient $S(x + 1) = S(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: S est une fonction 1-périodique.

(d) Montrer que la fonction

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \longmapsto g(x) := \pi\text{cotan}(\pi x) - S(x),$$

se prolonge en une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, impaire et 1-périodique.

On vérifie facilement que la fonction $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \longmapsto \pi\mathrm{cotan}(\pi x)$ est continue, impaire et 1-périodique. Ainsi $g : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est continue, impaire et 1-périodique.

Il suffit de montrer que la fonction g admet une limite finie en tout point de $\mathbb{Z}$. Comme g est 1-périodique, il suffit de regarder ce qu'il se passe en 0.

On voit tout d'abord que

$$(\star) \qquad S(x) = \frac{1}{x} - 2xH(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

où $H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - x^2}$ est une fonction continue sur $]-1, 1[$.

Utilisons un DL des fonctions cos et sin au voisinage de 0: on a

$$\pi\mathrm{cotan}(\pi x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \pi \frac{1 + o(x)}{\pi x + o(x^2)} = \frac{1}{x} \left(\frac{1 + o(x)}{1 + o(x)} \right) = \frac{1}{x} (1 + o(x)) = \frac{1}{x} + o(1).$$

La relation précédente, associée à la relation $(\star)$, montre qu'au voisinage de 0 on a $g(x) = o(1)$, c'est à dire $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

(e) Montrer que G vérifie de plus

$$G(\tfrac{x}{2}) + G(\tfrac{x+1}{2}) = 2G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calculons

$$S_n(\tfrac{x}{2}) + S_n(\tfrac{x+1}{2}) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\frac{x}{2} + k} + \frac{1}{\frac{x+1}{2} + k} = 2 \left(\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x + 2k} + \frac{1}{x + 2k + 1} \right)$$

Ainsi $S_n(\frac{x}{2}) + S_n(\frac{x+1}{2}) = 2S_{2n}(x) + \frac{1}{x+2n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En passant à la limite sur n, on obtient

$$(\clubsuit) \qquad S(\tfrac{x}{2}) + S(\tfrac{x+1}{2}) = 2S(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, calculons

$$\begin{aligned}
\pi\mathrm{cotan}(\pi \tfrac{x}{2}) + \pi\mathrm{cotan}(\pi \tfrac{x+1}{2}) &= \pi \frac{\cos(\pi \frac{x}{2}) \sin(\pi \frac{x+1}{2}) + \cos(\pi \frac{x+1}{2}) \sin(\pi \frac{x}{2})}{\sin(\pi \frac{x}{2}) \sin(\pi \frac{x+1}{2})} \\
&= \pi \frac{\sin(\pi x + \frac{\pi}{2})}{\frac{-1}{2} \cos(\pi x + \frac{\pi}{2})} \\
&= 2\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = 2\pi\mathrm{cotan}(\pi x).
\end{aligned}$$

La relation précédente, associée à $(\clubsuit)$, permet de conclure que

$$G(\tfrac{x}{2}) + G(\tfrac{x+1}{2}) = 2G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Comme G est continue sur $\mathbb{R}$, la relation précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(f) En déduire que G est la fonction identiquement nulle.

Comme G est continue, il existe $a \in [0,1]$ tel que $G(a) = \sup_{x\in[0,1]} G(x)$. Alors on a

$$G(\tfrac{a}{2}) + G(\tfrac{a+1}{2}) = 2G(a)$$

et aussi $G(\frac{a}{2}) \leq G(a)$ et $G(\frac{a+1}{2}) \leq G(a)$ car $\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2} \in [0,1]$. Cela donne les relations : $G(a) = G(\frac{a}{2}) = G(\frac{a+1}{2})$. Le même raisonnement permet de montrer que

$$\sup_{x\in[0,1]} G(x) = G(\tfrac{a}{2^n}), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite sur n, on obtient $\sup_{x\in[0,1]} G(x) = \lim_{n\to\infty} G(\frac{a}{2^n}) = G(0) = 0$.

Pour conclure que G est la fonction identiquement nulle, on vérifie tout d'abord que G est nulle sur $[0,1]$. On a deux façons de procéder:

- Faire le même raisonnement avec la borne inférieure de G sur $[0,1]$. On montre que $\inf_{x\in[0,1]} G(x) = 0$, et donc G est nulle sur $[0,1]$.

- Comme G est 1-périodique, on sait que $\sup_{t\in[-1,0]} G(t) = \sup_{x\in[0,1]} G(x) = 0$. Comme G est impaire, on a $0 = \sup_{t\in[-1,0]} G(t) = -\inf_{t\in[0,1]} G(t)$. On montre ainsi que G est nulle sur $[0,1]$.

Ensuite, on peut conclure que G est nulle sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.

(g) Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\alpha^2-1}$ pour tout entier $\alpha \geq 2$, au moyen de la fonction cotangente.

Les calculs précédents montrent que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a

$$x\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-x^2}\right) = \frac{1}{2x} - \frac{S(x)}{2} = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2}\mathrm{cotan}(\pi x).$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2\frac{1}{\alpha}} - \frac{\pi}{2}\mathrm{cotan}(\pi\tfrac{1}{\alpha})\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{cotan}(\tfrac{\pi}{\alpha}).$$