## Feuille d'exercices 3 : Séries entières

**Exercice 1** Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ dans les cas suivants :

$$a_n = \frac{1+3^n}{n^2+1} \ , \ a_n = n^2 2^{\sqrt{n}} \ , \ a_n = \ln(n!) \ , \ a_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \ , \ a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3} \ , \ a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$$

$$a_n = \begin{cases} n^4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ , \ a_n = \begin{cases} e^{-n} & \text{si } 10 \text{ divise } n \\ e^{-n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 2** Si $R$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, quel est le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum (-1)^n a_n x^n$,
2. $\sum a_n^2 x^n$,
3. $\sum a_n x^{2n}$,
4. $\sum a_n x^{n^2}$.

**Exercice 3** Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes, et leurs sommes :

$$\sum \frac{n^2}{3^n} x^n \ , \ \sum \cosh(n) x^n \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(\tfrac{2n\pi}{3}) x^n \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^n$$

**Exercice 4** Développer en série entière en 0 les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$
2. $k_t(x) = \frac{1}{x^2-2tx+1}$, pour $t \in \mathbb{R}$.
3. $g(x) = \frac{x^2+x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
4. $h(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$,

**Exercice 5** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, et $f\colon ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$.

1. Calculer la dérivée $n$-ième de $f$.
2. Montrer que la série $S := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.
3. Soit $g\colon ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la série $S$. Montrer que la fonction $x \mapsto (1+x)^{-\alpha} g(x)$ est constante. En déduire une relation entre $f$ et $g$.
4. En déduire le développement en série entière de arcsin sur $]-1,1[$.

**Exercice 6** 1. Déterminer une relation entre la fonction $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$ et sa dérivée.

2. Montrer que tanh définit une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$. On note $\tanh^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction réciproque.

3. Montrer que $\tanh^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ pour tout $x \in ]-1,1[$.

**Exercice 7 (Application du Théorème de convergence radiale d'Abel)**

1. Montrer que $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. *Indication : considérer la fonction* arctan*, et raisonner comme dans l'exercice 6.*
3. (*) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ *Indication : on pourra exprimer cette somme à l'aide d'une primitive de la fonction $x \mapsto (1+x^3)^{-1}$, que l'on obtiendra en utilisant une décomposition en éléments simples.*

**Exercice 8** Soit $(u_n)$ la suite récurrente définie par $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = 1$ et $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3^n$, et en déduire que le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum u_n x^n$ n'est pas nul.
2. Calculer la somme $S(x)$ de la série $\sum u_n x^n$ pour $|x| < R$.
3. Calculer $R$ et $u_n$ pour tout $n$.

**Exercice 9** On considère l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$.

1. Résoudre (E).
2. On cherche à retrouver les solutions de (E) grâce aux séries entières. On suppose que $y\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ est une solution de (E) développable en série entière et telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
   (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a
   $$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0.$$
   (b) En déduire que $y^{(2n)}(0) = 0$ et $y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n(2n)!$, puis expliciter une série entière sur $]-1,1[$ solution de (E).
   (c) Conclure.

**Exercice 10** On considère l'équation différentielle d'Airy :

$$(E) \qquad y'' - ty = 0.$$

Montrer que toutes les solutions de $(E)$ sont développables en séries entières de rayon de convergence infini.

**Exercice 11** Soit $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier que $f$ possède un développement en série entière. Quel est son rayon de convergence ?
2. Montrer que $f$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1, puis calculer le développement en série entière de $f$. *Pour simplifier les calculs on pourra utiliser le fait que $f$ est une fonction impaire.*
3. (*) En déduire la valeur de la série numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$

**Exercice 12** (*)

1. Montrer que si $|x| < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ converge. (Indication : majorer par une série connue.)
2. Montrer que si $|x| < 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}.$$

*Indication : développer $\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}$, utiliser la théorie des séries doubles, et enfin utiliser le fait que tout entier strictement positif s'écrit d'une manière unique sous la forme $2^n(2k+1)$, avec $k, n \in \mathbb{N}$.*