1 Compléments de la Feuille 1

Exercice 1. (a) On a les inclusions (strictes) suivantes

$$\mathcal{A}([a,b]) \subset \mathcal{P}([a,b]) \subset \mathcal{C}^1([a,b]) \subset \mathcal{C}([a,b]) \subset \mathcal{C}M([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b]) \subset \mathcal{I}([a,b]).$$

En effet, une fonction affine est un polynôme de degré 1 et tout polynôme est dérivable à dérivée continue (même C^∞), d'où les deux premières inclusions.

Ensuite, toute fonction dérivable est continue, et toute fonction continue est clairement continue par morceaux. Une fonction continue par morceaux admet une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$, donc appartient à $\mathcal{R}([a,b])$ d'après Théorème 2.7.6 du cours. Finalement, toute fonction continue par morceaux est intégrable.

Ensuite, on a

$$\mathcal{E}([a,b]) \subset \mathcal{A}M([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b]).$$

Une fonction en escalier est par définition une fonction constante (donc affine par morceaux). Une fonction affine par morceaux est affine sur chaque intervalle d'une subdivision et admet une limite à droite en tout point de $[a,b[$, ainsi qu'une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.

On a enfin

$$\mathcal{A}([a,b]) \subset \mathcal{A}M([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b]).$$

Cela exhauste toutes les relations d'inclusion entre les espaces donnés. On remarquera que tous ces espaces sont inclus dans l'espace des fonctions intégrables.

(b) Remarquons d'abord qu'une preuve purement topologique (du type "$\overline{A} = B$ donc $\overline{\overline{A}} = \overline{A} = \overline{B} = C$") ne s'applique pas car on aurait envie de travailler sur un espace de fonctions A muni de la norme sup, mais celle-ci n'est pas a priori bien définie sur A. Pour cause, il existe des fonctions non bornées (donc à norme infinie) intégrables.

Nous raisonnons alors selon les suites de fonctions. Il s'agit de montrer que toute fonction dans C est limite uniforme d'une suite de fonctions dans A. Comme B est dense dans C, toute fonction $f \in C$ est limite uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans B.

On va construire à partir de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans A qui converge vers f.

Comme A est dense dans B, f_1 est limite uniforme d'une suite $(f_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_{1,n} \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(1) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| f_{1,N(1)} - f_1 \right\|_\infty < \varepsilon/2.$$

En raisonnant de même pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre qu'il existe $N(n) \in \mathbb{N}$ et $f_{n,N(n)} \in A$ de sorte que

$$\left\| f_{n,N(n)} - f_n \right\|_\infty < \varepsilon/2.$$

Montrons alors que la suite $(f_{n,N(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq N_0$ tel que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/2$. Par l'inégalité triangulaire des normes, on a pour $n \geq N_0$

$$\left\|f_{n,N(n)} - f\right\|_\infty \leq \left\|f_{n,N(n)} - f_n\right\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Par construction la suite $(f_{n,N(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans A, donc A est dense dans C.

(c) Soit$f$ la limite uniforme de fonctions réglées $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}([a,b])^{\mathbb{N}}$. Par Théorème 2.7.6 du cours, f_n admet une limite à gauche et à droite en tout point de $]a,b[$, ainsi qu'une limite à droite en a et une limite à gauche en b. En appliquant le théorème d'interversion CU/ continuité (cf. Théorème 2.3.3 du cours), la fonction limite f a aussi une limite à gauche en tout point de $]a,b]$ et une limite à droite en tout point de $[a,b[$. Par suite, f est réglée encore selon Théorème 2.7.6.

(d) Puisque $|\sin(1/x)| \leq 1$ pour tout $x \in]0,1]$, il s'ensuit que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$, donc f est intégrable.

Si f est limite uniforme de fonctions en escalier, f est continue à droite en 0, c'est-à-dire.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0,$$

où la notation $x \to 0^+$ signifie que $x > 0, x \to 0$. On cherche alors une suite $x_n \to 0^+$ de sorte que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite en 0, ce qui sera une contradiction. Il suffit de prendre par exemple

$$x_n = \frac{2}{n\pi} > 0.$$

On vérifie immédiatement que

$$f(x_n) = \sin(1/x_n) = \sin(n\frac{\pi}{2}) = (-1)^n,$$

donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite bien définie. En conclusion, f n'est pas limite uniforme de fonctions en escalier.

(e) On peut, sans perdre de généralité, travailler sur l'intervalle $[0,1]$. En effet, si f est un fonction continue sur $[a,b]$ alors $g(x) := f(\frac{x-b}{b-a})$ est une fonction continue sur $[0,1]$ (cf. Preuve du Théorème de Stone-Weierstrass). Par suite, si g_n est une suite de fonctions affines par morceaux sur $[0,1]$ qui convergent uniformément vers g, alors $f_n(x) := g_n(x(b-a)+a)$ est une suite de fonctions affines par morceaux qui convergent uniformément vers f.

Soit maintenant g une fonction continue sur $[0,1]$. On peut subdiviser $[0,1]$ en n intervalles de longueur $1/n$, et prendre sur chaque intervalle la fonction affine qui en relie les deux extrémités.

Pour être précis, écrivons

$$[0,1] = \cup_{k=0}^{n-1} I_k, \quad I_k := \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right].$$

Définissons alors la fonction affine par morceaux g_n qui s'écrit sur chaque intervalle I_k comme

$$g_n|_{I_k}(x) := n\left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)x + (k+1)g\left(\frac{k}{n}\right) - kg\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Il s'agit de l'unique droite affine reliant $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$. Vérifons maintenant que g est la limite uniforme de (g_n). On a

$$\begin{aligned}g(x) - g_n(x) &= (k+1)g(x) - kg(x) - g_n(x) \\ &= (k+1)\left(g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right) + k\left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g(x)\right) \\ &\quad + n\left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)x.\end{aligned}$$

On admet le théorème de Heine : toute fonction continue sur un intervalle compact est uniformément continue.

Ainsi, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout paire x, x_0 satisfaisant $|x - x_0| \leq \frac{1}{n}$, on a

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \frac{1}{3n^2}.$$

En fixant un tel N, on a pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in I_k$, $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ (car I_k est de longueur $\frac{1}{n}$), d'où

$$(k+1)\left|g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{k+1}{3n^2} \leq \frac{1}{3n}. \tag{1}$$

De même,

$$k\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g(x)\right| \leq \frac{k}{3n^2} \leq \frac{1}{3n}. \tag{2}$$

Ensuite,

$$n\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right||x| \leq n\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{3n}. \tag{3}$$

En combinant (1), (2), (3), on a pour tout $n \geq N$,

$$|g(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

On en conclut que g est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux g_n, ce qui achève la démonstration.

(f) Soit $\mathcal{P}_E([a,b])$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers. Selon l'exercice 17 (c), $\mathcal{P}_E([a,b])$ est dense dans $\mathcal{P}([a,b])$, qui est lui-même dense dans $\mathcal{C}([a,b])$ d'après le théorème de Stone-Weierstrass. On conclut alors du résultat obtenu dans (b) que $\mathcal{P}_E([a,b])$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$.

Exercice 2. Soit $V = \mathcal{C}([0,1])$.

(a) Clairement la fonction $f \to \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ est positive. Vérifions qu'elle vérifie les axiomes d'une norme sur V.

D'abord remarquons que $\|f\|_1 = 0$ ssi $\int_0^1 |f(x)|\,dx = 0$. Montrons en utilisant la continuité que f est la fonction identiquement nulle sur $[0,1]$. En effet, s'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$, alors par continuité de f, il existe un intervalle centré en x_0 de rayon $\eta > 0$ tel que $|f(x)| > |f(x_0)| + 1$ pour tout $x \in]-\eta + x_0, x_0 + \eta[$ (cf. corrigé de l'exercice 16, (f)). Par suite

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx > \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(x)|\, dx > 2\eta(|f(x_0)| + 1) > 0,$$

une contradiction. Donc f est la fonction partout nulle.

Ensuite, on a clairement

$$\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda|\, |f(x)|\, dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|\, dx = |\lambda|\, \|f\|_1 .$$

Enfin, l'inégalité triangulaire de la norme suit de l'inégalité triangulaire

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|\,,\ x \in [0,1].$$

En effet,

$$\|f + g\|_1 = \int_0^1 |f(x) + g(x)|\, dx \leq \int_0^1 |f(x)|\, dx + \int_0^1 |g(x)|\, dx = \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

(b) Soit $P(X) = G_2 X + 2F_1 G_1 X + F_2$ où

$$F_1 = \int_{0^1} f(x)dx, \quad G_1 = \int_0^1 g(x)dx, \quad G_2 = \int_0^1 g(x)^2 dx, \quad F_2 = \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

Par construction, $P(X) = \int_0^1 (f(x) + Xg(x))^2 dx \geq 0$ pour tout X. D'après le théorème sur les solutions d'un polynôme quadratique, le discriminant $\Delta(P) = F_1^2 G_1^2 - F_2 G_2$ doit être négatif, donc

$$F_1^2 G_1^2 \leq F_2 G_2,$$

ce qui se traduit par

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_2\, \|g\|_2 .$$

Il s'agit de *l'inégalité de Schwarz*. On en déduit alors que

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\,\|f\|_2\,\|g\|_2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.$$

On en conclut que $f \to \|f\|_2$ est une norme sur V.

(c) On a

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 f(t)^2 dt \leq \sup_{t\in[0,1]} f(t)^2 = (\sup_{t\in[0,1]} f(t))^2 = \|f\|_\infty^2 .$$

Pour l'autre inégalité, on peut utiliser l'inégalité de Schwarz obtenue dans la question précédente. En effet, en posant $h = |f|$ et $g = 1$, on a

$$\left(\int_0^1 |f(x)|\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 h(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 h(x)^2dx\right)\left(\int_0^1 g(x)^2dx\right)$$
$$= \int_0^1 f(x)^2dx.$$

Autrement dit, $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$.

(d) On peut prendre par exemple $f_n(x) = e^{-nx}$. Comme f_n est une fonction décroissante sur $[0,1]$ pour tout n, on a alors

$$\|f_n\|_\infty = f(0) = 1.$$

D'autre part,

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx = \int_0^1 e^{-2nx}dx = \frac{e^{-2n}-1}{2n}.$$

Il est immédiat de vérifier que $\lim \|f_n\|_2^2 = 0$.

(e) Soit $g_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x)$. On a alors

$$\int_0^1 |g_n(x)|\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 |\cos(n\pi x)|\,dx$$
$$= \sqrt{2}\int_{\{g_n\geq 0\}} \cos(n\pi x) - \int_{\{g_n\leq 0\}} \cos(n\pi x).$$

Comme $I = [0,1]$ est compact, les ensembles $I_+ := \{x \in I, g_n(x) \geq 0\}$ et $I_- := \{x \in I, g_n(x) \leq 0\}$ sont aussi des compacts. On peut encore supposer que les $I_\pm$ sont réunion finie disjointe d'intervalles compacts. Ainsi, écrivons

$$I_+ = \cup_{j=1}^k I_j, \quad I_j = [a_j, b_j],\ a_j < b_j.$$

On a alors

$$\int_{I_+} g_n(x)dx = \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} \cos(n\pi x) = \sum_{j=1}^k \frac{\sin(n\pi b_j) - \sin(n\pi a_j)}{n\pi},$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ car le numérateur est borné par $2k$ en valeur absolue. De même, $\lim_{n\to+\infty} \int_{I_-} g_n(x)dx = 0$. Il s'ensuit que $\lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_1 = 0$.

D'autre part, pour tout n

$$\|g_n\|_2 = \int_0^1 g_n(x)^2dx = 2\int_0^1 \cos^2(n\pi x)dx = \int_0^1 (1+\cos(2n\pi x))dx = 1.$$

(f) Supposons qu'il existe $c > 0$ de sorte que

$$\|f\|_\infty \leq c\,\|f\|_1\,, \quad \forall f \in V.$$

On a alors d'après (d)

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \leq c\,\|f\|_1 .$$

Soit (g_n) la suite trouvée dans (e). On a alors

$$\|g_n\|_1 \leq \|g_n\|_2 \leq \|g_n\|_1 ,$$

d'où en prenant la limite $n \to +\infty$, on obtient

$$0 \leq 1 \leq 0,$$

une contradiction.