Université de Montpellier
- Faculté des Sciences -
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023-2024
Licence 2ère année - Semestre 2
Informatique - Algèbre linéaire et calcul matriciel

HAI406 - Examen final - 2H

N.B : Caluculettes et documents interdits

Exercice 1.

On considère la matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l?application linéaire f_1 associée à M_1 (on précisera les espaces de départ et d?arrivée de f_1).
2. Résoudre le système $M_1X = 0$; en déduire une représentation paramétrique du noyau de f_1. L'application f_1 est-elle injective ?
3. Soit (a, b, c) un élément de $\mathbb{R}^3$: résoudre le système $M_1X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Montrer que l?image de f_1 est un plan dont on déterminera une équation cartésienne ; f_1 est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
4. Soit λ un réel et l?application $f_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_\lambda(x, y, z, t) = (x + y + 2z + t, x + \lambda y + 2z - 3t, x + y + 2z - t)$. Pour quelles valeurs de λ l?application f_λ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 2. (•)

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer A^2 puis A^3. Comment appelle-t-on une telle matrice ? Montrer, de trois manières différentes, que A n'est pas inversible.

Exercice 3. (•) Dire si les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses le cas échéant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ -3 & 2i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -6i \\ 2+i & 2-4i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2 \\ 0 & \alpha+1 \end{bmatrix} \ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice 4. (•) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

1. Montrer que A est inversible, puis calculer son inverse A^{-1}.
2. Résoudre (rapidement !) chacun des trois systèmes suivants:

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad AX = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \text{et} \qquad AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (X \in \mathbb{R}^3).$$

Exercice 5. ($\bullet$) On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ et $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que U est inversible, et calculer U^{-1}.
2. Calculer $D = U^{-1}AU$. Ecrire la matrice D^k. En déduire l'expression explicite de A^k.
3. Vérifier que D et A ont même trace et même déterminant. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible, puis calculer A^{-1}.
2. Calculer la matrice $B = -A^3 - 2A^2 + 6A$.
3. A l'aide du résultat précédent, retrouver A^{-1} par une méthode plus rapide que celle de la double matrice.

Exercice 7. ($\bullet$)

1. Vérifier sur les matrices carrées d'ordre 2 la validité de la formule : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. Vérifier sur les matrices carrées d'ordre 3 la validité de la formule : $\det({}^tA) = \det(A)$.

Exercice 8. ($\bullet$) Soit A une matrice carrée d'ordre 2. On note δ son déterminant et τ sa trace.

1. Montrer que $A^2 - \tau A + \delta I = 0$.
2. Retrouver le fait (admis en cours) que si $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible.
3. Retrouver à l'aide de (1) la formule vue en cours donnant l'inverse de A.

Exercice 9. ($\bullet$) Soit P une matrice idempotente[1].

1. Donner des exemples concrets de matrices P.
2. P peut-elle être inversible? Si oui, dans quel(s) cas ?
3. Posons $S := 2P - I$. Calculer S^2. En déduire que S est inversible, puis donner son inverse.

Exercice 10. ($\star$) Soient A une matrice de taille $n \times p$ et B une matrice de taille $p \times n$. Montrer[2] que si $AB = I_n$ et $BA = I_p$, on a nécessairement $n = p$. Moralité ?

Exercice 11. ($\star$) Montrer[3] que si A est une matrice antisymétrique, alors la matrice $I + A$ est inversible.

Exercice 12. ($\star$) Choisissons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

On rappelle que l'expression $\langle X \mid X' \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien et $\|X\| = \sqrt{\langle X \mid X \rangle}$ la norme euclidienne associée. On notera $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme porté par ces deux vecteurs et θ l'angle qu'ils définissent. On définit enfin la matrice :

$$M = [X \mid X'] = \begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A} = \|X\| \, \|X'\| \sin(\theta)$.
2. Vérifier que
$${}^tM\, M = \begin{bmatrix} \|X\|^2 & \langle X \mid X' \rangle \\ \langle X \mid X' \rangle & \|X'\|^2 \end{bmatrix}.$$
3. En déduire que $\mid \det(M) \mid = \mathcal{A}$.

[1] ie : on rappelle qu'une telle matrice P est une matrice carrée vérifiant la propriété $P^2 = P$.
[2] Indice: penser à utiliser la trace.
[3] Indice : montrer d'abord que si A est antisymétrique d'ordre n et si $X \in \mathbb{R}^n$, alors $(I + A)X = \mathbf{0} \Rightarrow X = \mathbf{0}$.