Ex1

Corrigé CC 1

1- L'erreur de consistance du schéma est :

$$\varepsilon(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

$$= y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\, y'(t_{n+1}) \quad \text{puisque } t \longmapsto y(t)$$

est solution de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$.

Effectuons un développement de Taylor au voisinage de t_n :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n+h) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n+h) = y'(t_n) + h\, y''(t_n) + O(h^2)$$

Donc

$$\varepsilon(h) = \cancel{y(t_n)} + \cancel{h\, y'(t_n)} + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3) - \cancel{y(t_n)} - h\left(\cancel{y'(t_n)} + h\, y''(t_n) + O(h^2)\right)$$

$$\underline{\varepsilon(h)} = -\frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3) = \underline{O(h^2)}$$

2- prenons $f=0$ et étudions le schéma :

$$y_{n+1} = y_n \quad \forall n \quad \text{donc} \quad y_n = y_0, \ \forall n$$

On a bien $|y_n| \leq C\,|y_0|$ donc <u>le schéma est stable</u>.

<u>Rq</u> on peut aussi étudier $\rho(z) = z - 1$ dont la racine 1 est simple.

3- D'après le théorème de convergence des schémas multipas qui s'applique aussi dans le cas de ce schéma à un pas implicite, le schéma est stable et consistant donc le schéma est convergent. Comme l'erreur de consistance est $O(h^2)$ le schéma est d'ordre 1, ce qui signifie que

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| = O(h).$$

4 - On peut calculer y_{n+1} comme point fixe de

$y \xrightarrow{g} y_n + h f(t_{n+1}, y)$ qui est contractante pour h petit

car $|g(y) - g(z)| = |h(f(t_{n+1}, y) - f(t_{n+1}, z))|$

$\leq L h |y - z|$, $Lh < 1$ si $h < \frac{1}{L}$

il suffit alors de calculer quelques itérations $y_{n+1}^{(0)} = y_n$, $y_{n+1}^{(1)} = g(y_n^{(0)})$

$y_{n+1}^{(2)} = g(y_n^{(1)})$ jusqu'à atteindre une précision convenable.

Ex2 on reconnaît un schéma multipas explicite.

1) Ecrivons le ainsi

$$y_{n+4} - y_{n+3} = h\left(\frac{55}{24} f_{n+3} - \frac{59}{24} f_{n+2} + \frac{37}{24} f_{n+1} - \frac{9}{24} f_n\right)$$

introduisons les polynômes associés :

$\rho(z) = z^4 - z^3$ $\qquad \sigma(z) = \frac{55}{24} z^3 - \frac{59}{24} z^2 + \frac{37}{24} z - \frac{9}{24}$

le critère de consistance est $\rho(1) = 0$ et $\rho'(1) = \sigma(1)$

$\rho(1) = 0$, $\rho'(z) = 4z^3 - 3z^2$ donc $\rho'(1) = 1$

$\sigma(1) = \frac{55 - 59 + 37 - 9}{24} = \frac{24}{24} = 1$

le schéma est donc consistant.

~~Rq~~ si on veut calculer $\varepsilon(h)$ il faut faire un développt de Taylor à l'ordre 4...

---

2) Etudions les racines de $\rho(z) = z^3(z-1)$

les racines sont 0 (triple) , 1 (simple)

les racines sont bien de module ≤ 1 et la racine de module 1 est simple donc le schéma est stable.

3) le théorème de convergence des schémas multipas implique que le schéma est convergent. Comme $\varepsilon(h) = O(h^5)$, le schéma est d'ordre 4.