UNIVERSITE DE MONTPELLIER

FACULTE DES SCIENCES

Session : contrôle continu 1	
Date : 26/03/2024	Durée de l'épreuve : 1h05
L3 Licence Mathématiques & Mécanique	Documents autorisés : néant
Parcours : MG, MSM	Matériels autorisés : néant.
UE : Analyse numérique des équations différentielles. (HAX604X)	

Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Barème indicatif. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. (5 pts) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0. \tag{1}$$

On considère le schéma d'Euler implicite :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

où l'on note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est suffisamment régulière et que $y \mapsto f(t, y)$ est globalement lipschitzienne de rapport L, indépendant de t.

1. (1pt) Estimer l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance du schéma en fonction de h.
2. (1pt) Est-ce que le schéma est stable ?
3. (2pts) On fixe $T > 0$. Estimer l'ordre de grandeur de $\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n|$ en fonction de h. Est-ce que le schéma est convergent ? Si oui, quel est son ordre de convergence ?
4. (1pt) Indiquer une méthode permettant de calculer approximativement y_{n+1} connaissant y_n.

Exercice 2 (5 pts) Soit l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. On note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On note $f_k = f(t_k, y_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Le schéma de Adams-Bashforth est donné par

$$y_{n+1} - y_n = h \left(\frac{55}{24} f_n - \frac{59}{24} f_{n-1} + \frac{37}{24} f_{n-2} - \frac{9}{24} f_{n-3} \right).$$

C'est un schéma multipas explicite qui permet de calculer y_{n+1} étant donnés y_n, y_{n-1} , y_{n-2} et y_{n-3} pour $n \geq 3$.

1. (2 pts) Montrer que le schéma de Adams-Bashforth est consistant. *On ne demande pas d'estimer l'ordre de l'erreur de consistance.*
2. (2 pts) Montrer que le schéma de Adams-Bashforth est stable.
3. (1 pt) On *admet* que l'erreur de consistance est en $\mathcal{O}(h^5)$. Est-ce que le schéma converge ? Quelle est l'ordre de convergence du schéma ? Justifiez.