

① Un espace vectoriel peut avoir plusieurs bases.

Déf: une base de \mathbb{R}^n est une famille de n vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ tels que $\forall v \in \mathbb{R}^n$ s'écrit (de façon unique)

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 1 \dots n$$

Exemples

* \mathbb{R}^n avec la base $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ème place}$$

* \mathbb{R}^2 avec la base $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{ex: } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

* \mathbb{R}^3 avec la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Supposons que \vec{v} a coordonnées (a, b, c) dans $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E})$
 $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, on se demande comment exprimer \vec{v}
dans la base $\mathcal{M} = \{u_1, u_2, u_3\}$. Cela se fait à l'aide
d'une matrice.

Théorème

Appellons (α, β, δ) les coordonnées de \vec{v} dans la base \mathcal{M} .

Alors pour trouver (a, b, c) on multiplie $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ par la
matrice A dont les colonnes sont les coordonnées de u_1, u_2 et
 u_3 dans la base e_1, e_2, e_3 .

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix}$$

② Exemple $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $(\mathbb{R}^3, \mathcal{U})$ donc

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E})$.

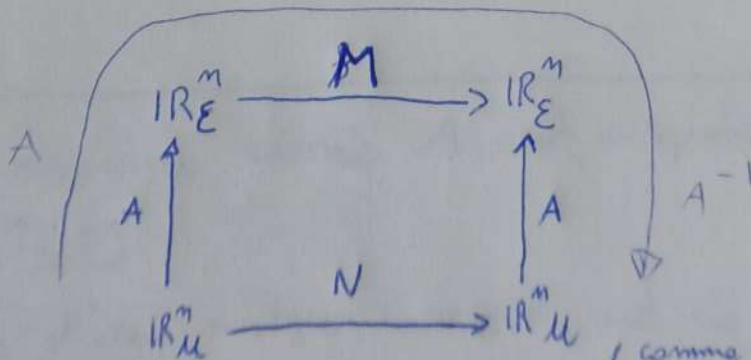
Rmq: ~~pour~~ si nous avons les coordonnées de \vec{v} dans la base \mathcal{E} , pour obtenir les coordonnées de \vec{v} dans la base \mathcal{U} , il suffit de multiplier par A^{-1} . En effet A est inversible.

donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

La généralisation à \mathbb{R}^m est immédiate: la matrice de changement de base de $(\mathbb{R}^m, \{u_1, \dots, u_m\})$ à $(\mathbb{R}^m, \{e_1, \dots, e_m\})$ a comme colonnes les expressions de u_1, \dots, u_m dans la base $\{e_1, \dots, e_m\}$.

Que se passe-t-il avec application linéaires? Si j'ai une application linéaire $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, au \mathbb{R}^m et la base $\{\mathcal{E}\}$, elle sera représentée par une matrice M .

Si \mathbb{R}^m et la base $\{\mathcal{U}\}$, quelle sera la matrice N qui représente f ?



le diagramme montre que $N = A^{-1} \cdot M \cdot A$

(comme la flèche à droite on le parcourt à l'envers)

③ Cette procédure peut être utile pour trouver ~~de~~ une base M dans laquelle la matrice associée à f a une forme simple, par ex. elle est diagonale. Si une telle base existe on dit que M est diagonalisable.

Être diagonalisable est très important dans les calculs.

Par exemple, supposons que ~~A est diag~~ $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. Donc

$D = P^{-1}AP$, avec P la

matrice de changement de base. Alors $A = PDP^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$ diagonale.

Si on doit calculer A^m il suffit d'observer

$$A^m = \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}^{m \text{ fois}} =$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ \text{Id}_m & \text{Id}_m & \dots & \text{Id}_m \end{matrix}$$

$$= PD^m P^{-1} \quad \text{et} \quad D^m = \begin{pmatrix} \mu_1^m & & \\ & \mu_2^m & \\ & & \ddots \\ & & & \mu_n^m \end{pmatrix}$$

Def: une matrice carrée A est nilpotente si $\exists n > 0$ tel que $A^n = 0$.

Def: le tracé d'une matrice carrée A est la somme de ses termes diagonaux. Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\text{tr}(A) = 1 + 4 = 5$

Thm:

(4)

* $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$

* $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

* $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$ en général $\triangle!$

Prop

Soient $A, P \in M_n(\mathbb{R})$, P inversible, alors

$$\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr}(A)$$

carriées

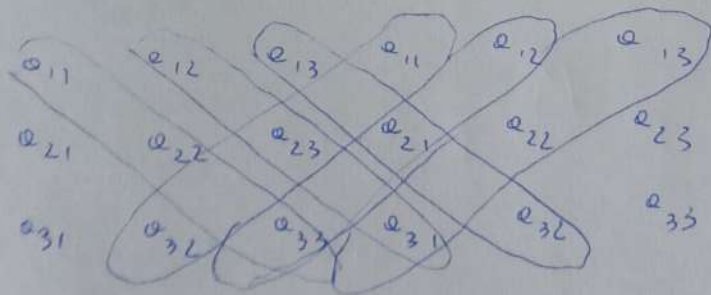
donc: si deux matrices \forall représentent la même application linéaire, alors elles ont la même trace.

Déf

Le déterminant d'une matrice carrée:

• si $A \in M_2(\mathbb{R})$ $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

• si $A \in M_3(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$



règle de Sarrus

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Rmq: Pour une matrice triangulaire, le déterminant (5) est le produit des termes sur la diagonale.

Propriétés

• $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

~~en général~~ en général $\triangle!$

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

• $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

• $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ donc $\det(A^m) = (\det(A))^m$

Prop:

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Thm

Si A et A' représentent la même application linéaire dans 2 bases différentes, alors $\det(A) = \det(A')$

En effet $\det(PAP^{-1}) = \det(P) \det(A) (\det(P))^{-1} = \det(A)$
avec P matrice de changement de base.

Thm

• $\det(\text{Id}_n) = 1$

etc