Un espace vectoriel peut avoir plusieurs bases.

<u>Déf</u>: une base de $\mathbb{R}^n$ est une famille de n vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ ~~telles~~ tels que $\forall v \in \mathbb{R}^n$ s'écrit (de façon unique)

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \qquad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \forall i = 1 \dots n$$

<u>Exemples</u>

* $\mathbb{R}^n$ avec la base $\{e_1 \dots e_n\}$ $\qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ème place

<u>ex</u>: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

* $\mathbb{R}^2$ avec la base $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* $\mathbb{R}^3$ avec la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Supposons que $\vec{v}$ a coordonnées (a, b, c) dans $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E})$ $\mathcal{E} = \{e_1 e_2 e_3\}$, on se demande comment exprimer $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{U} = \{u_1 u_2 u_3\}$. Cela se fait à l'aide d'une matrice.

<u>Théorème</u>

Appellons (α, β, γ) les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{U}$.

Alors pour trouver (a, b, c) on multiplie $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ par la matrice A dont les colonnes sont les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base $e_1 e_2 e_3$.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

② <u>Exemple</u> $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ dans $(\mathbb{R}^3, \mathcal{U})$ donc

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$ dans la base $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E})$.

<u>Rmq</u>: ~~pour~~ si nous avons les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{E}$, pour obtenir les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{U}$, il suffit de multiplier par A^{-1}. En effet A est inversible.

donc $$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \left(A^{-1}\right)\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

La généralisation à $\mathbb{R}^n$ est immédiate: la matrice de changement de base de $(\mathbb{R}^n, \{u_1, \dots u_n\})$ à $(\mathbb{R}^n, \{e_1, \dots e_n\})$ a comme colonnes les expressions de $u_1, \dots, u_n$ dans la base $\{e_1, \dots e_n\}$.

Que se passe-t-il aux applications linéaires? Si j'ai une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, où $\mathbb{R}^n$ a la base $\{\mathcal{E}\}$, elle sera représentée par une matrice M.

Si $\mathbb{R}^n$ a la base $\{\mathcal{U}\}$, quelle sera la matrice N qui représente f?

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \arrow[r, "M"] & \mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \\
\mathbb{R}^n_{\mathcal{U}} \arrow[u, "A"] \arrow[r, "N"] & \mathbb{R}^n_{\mathcal{U}} \arrow[u, "A"']
\end{tikzcd}$$

le diagramme montre que $N = A^{-1} \cdot M \cdot A$

(comme la flèche à droite on la parcourt à ~~l'envers~~ l'inverse)

③

$\mathcal{O}$. cette procédure peut être utile pour trouver ~~de~~ une base $\mathcal{U}$ dans laquelle la matrice associée à f a une forme simple, par ex. elle est diagonale. Si une telle base existe on dit que M est diagonalisable.

Être diagonalisable est très important dans les calculs. Par exemple, supposons que ~~A est diag~~ $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. Donc $D = P^{-1} A P$, avec P la matrice de changement de base. Alors $A = PDP^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{pmatrix}$ diagonale.

Si on doit calculer A^n il suffit d'observer

$$A^n = \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})(P \cdots\cdots P^{-1})(PDP^{-1})}^{n \text{ fois}} =$$

$$P^{-1}P = Id_n, \quad P^{-1}P = Id_n, \quad P^{-1}P = Id$$

$$= P D^n P^{-1} \qquad \text{et} \qquad D^n = \begin{pmatrix} \mu_1^n & & & \\ & \mu_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n^n \end{pmatrix}$$

<u>Déf</u>: une matrice carrée A est nilpotente si $\exists n > 0$ tel que $A^n = 0$.

<u>Déf</u>: la <u>trace</u> d'une matric carrée A est la somme de ses termes diagonaux. Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\operatorname{tr}(A) = 1 + 4 = 5$

Thm :

* $tr(\lambda A + \mu B) = \lambda\, tr(A) + \mu\, tr(B)$

* $tr(AB) = tr(BA)$

* $tr(AB) \neq tr(A)\, tr(B)$ en général ⚠

Rmq

Soient $A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, P inversible, alors

$$tr(PAP^{-1}) = tr(PP^{-1}A) = tr(A)$$

donc : si deux matrices carrées représentent la même application linéaire, alors elles ont la même trace.

Déf

Le déterminant d'une matrice carrée :

- si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

- si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $\quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

règle de Sarrus

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Rmq : Pour une matrice triangulaire, le déterminant est le produit des termes sur la diagonale.

Propriétés $\quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ en général ⚠

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ donc $\det(A^m) = (\det(A))^m$

Prop :

A est inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

Thm

Si A et A' représentent la même application linéaire dans 2 bases différentes, alors $\det(A) = \det(A')$

En effet $\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)(\det(P))^{-1} = \det(A)$

avec P matrice de changement de base.

Thm

- $\det(Id_n) = 1$

[illegible]