MODULE HAX201X
ANNÉE 2023/2024

Corrigé du CC1, 18 mars 2024
Durée : 1 h 10

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Le barême est indicatif.

Questions de cours (9 points)

1. Déterminer la limite (où $n \in \mathbb{N}$) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^8 \ln(n) + 5\cos(n)}{e^n + 1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\left|\frac{n^8 \ln(n) + 5\cos(n)}{e^n + 1}\right| \leq \frac{n^8 \ln(n)}{e^n+1} + \frac{5}{e^n+1} \leq \frac{n^8 \ln(n)}{e^n} + \frac{5}{e^n}$$
$$\leq \frac{n^8}{e^{n/2}}.\frac{\ln(n)}{e^{n/2}} + \frac{5}{e^n}.$$

Par croissances comparées $\frac{n^8}{e^{n/2}}$, $\frac{\ln(n)}{e^{n/2}}$ et $\frac{5}{e^n}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^8 \ln(n) + 5\cos(n)}{e^n + 1} = 0.$$

2. Soit (u_n) une suite réelle croissante et non majorée. Écrire avec des quantificateurs ces deux propriétés, puis montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Une suite (u_n) est croissante si pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \Rightarrow u_m \geq u_n$. Elle est non majorée si pour tout $C \in \mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > C$.

Supposons que (u_n) est croissante et non majorée. Soit $C \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) est non majorée il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > C$. Comme (u_n) est croissante, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n \Rightarrow u_m \geq u_n$.

Donc : $\exists n \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow u_m > C$. Par définition ceci prouve $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. Exhiber une suite qui admet trois valeurs d'adhérence distinctes.

Par exemple la suite (u_n) définie par

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0[3] \\ 1 & \text{si } n \equiv 1[3] \\ 2 & \text{si } n \equiv 2[3] \end{cases}$$

convient ; on a $\mathrm{Adh}(u_n) = \{0, 1, 2\}$. Autre exemple (vu en TD) : $u_n = \sin(n\frac{\pi}{3})$, où $\mathrm{Adh}(u_n) = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

4. Donner la définition d'une suite de Cauchy. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

Une suite (u_n) est de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \epsilon$.

Soit (u_n) une suite Cauchy. Prenons $\epsilon = 1$ (par exemple), et $N \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < 1$. Alors pour tout $p \geq N$ on a par l'inégalité triangulaire

$$|u_p| = |u_p - u_N + u_N| \leq |u_p - u_N| + |u_N| \leq 1 + |u_N|.$$

Posons $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |u_N|)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $|u_p| \leq M$, donc (u_n) est bornée.

Exercice (14 points)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{2}{x+1}$, et la suite (u_n) définie par $u_0 > -1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Vérifier que $f(]-1, +\infty[) \subset]-1, +\infty[$. En déduire que la suite (u_n) est bien définie, et déterminer ses limites potentielles.

La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, et $f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2} < 0$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$. Donc f est (strictement) décroissante sur $]-1, +\infty[$, et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donne alors $f(]-1, +\infty[) \subset]0; +\infty[$. D'où

$$f(]-1, +\infty[) \subset]-1; +\infty[.$$

(En fait, comme $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ le théorème des valeurs intermédiaires implique $f(]-1, +\infty[) =]0; +\infty[$).

Puisque $u_0 \in]-1, +\infty[$ et $f(]-1, +\infty[) \subset]-1; +\infty[$, la formule $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \in]-1, +\infty[$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de f ; puisque $u_n \in]-1, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce point fixe est dans l'intervalle $]-1; +\infty[$ (-1 est exclu car f n'y est pas défini). Or un calcul immédiat montre que pour tout $l \in \mathbb{R}$, $f(l) = l$ si, et seulement si, $l^2 + l - 2 = 0$. Les racines de cette équation sont -2 et 1, donc la seule limite possible de (u_n) est 1.

2. Dans cette question uniquement, on fixe le choix $u_0 = 2$. Représenter le graphe de f, la droite d'équation $y = x$, ainsi que u_1, u_2 et u_3.

La construction graphique des points u_1, u_2 et u_3 se fait comme dans la Figure 1.2 en page 19 du polycopié de cours "Analyse 2".

3. Dans cette question on suppose que $u_0 \in [\frac{1}{2}, 2]$.

(1) Montrer que $f([\frac{1}{2}, 2]) \subset [\frac{1}{2}, 2]$.

On a vu à la question 1 que f est décroissante sur $]-1; +\infty[$. On a $f(2) = \frac{2}{3}$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$, donc $f([\frac{1}{2}, 2]) \subset [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}] \subset [\frac{1}{2}, 2]$.

(2) Montrer que $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{8}{9}|u_n - 1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut faire un calcul direct. En réduisant au même dénominateur on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - 1| = \left|\frac{1-u_n}{1+u_n}\right|$. D'après la question précédente, $u_0 \in [\frac{1}{2}, 2]$ implique $u_n \in [\frac{1}{2}, 2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $|1 + u_n| = 1 + u_n \geq 3/2$, et finalement

$$|u_{n+1} - 1| = \frac{|1 - u_n|}{1 + u_n} \leq \frac{|1 - u_n|}{3/2} \leq \frac{8}{9}|u_n - 1|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut aussi utiliser le théorème des accroissements finis (TAF) : on a $f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$, et $9/4 \leq (1 + x)^2 \leq 9$ pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 2[$, donc $|f'(x)| \leq 8/9$ pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 2[$. Maintenant, comme $f(1) = 1$ on a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 1| &\overset{\text{def}}{=} |f(u_n) - f(1)| \\ &\overset{\text{TAF}}{\leq} \sup_{t \in]\frac{1}{2},2[} |f'(x)|.|u_n - 1| \\ &\leq \frac{8}{9}|u_n - 1| \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Montrer que $|u_n - 1| \leq (\frac{8}{9})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On procède par récurrence. Comme $u_0 \in [\frac{1}{2}, 2]$, $|u_0 - 1| \leq 1 = (\frac{8}{9})^0$, donc le résultat est vrai pour $n = 0$. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ on a $P(n)$: $|u_n - 1| \leq (\frac{8}{9})^n$. Alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 1| &\leq \frac{8}{9}|u_n - 1| \\ &\leq \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

On a utilisé la question précédente dans la première inégalité, et l'hypothèse de récurrence $P(n)$ dans la seconde. Ceci prouve l'hérédité de $P(n)$, et donc $|u_n - 1| \leq (\frac{8}{9})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) En déduire que (u_n) converge.

On a $\lim_{n\to+\infty}(\frac{8}{9})^n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n - 1| = 0$ d'après la question précédente. Ceci montre que (u_n) converge vers 1.

4. Dans cette question on suppose que $u_0 \in]-1, 1[$, et on pose $v_n = u_{2n}$.

(1) Montrer que (v_n) est une suite récurrente pour une fonction $g\colon]-1, 1[\to]-1, 1[$ que l'on précisera.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(v_n)$. Donc (v_n) est une suite récurrente pour la fonction $g := f \circ f$. Un calcul donne $g(x) = \frac{2+2x}{3+x}$. Avec cette formule ou bien le tableau de variation de f, on vérifie que $g(]-1, 1[) \subset]-1, 1[$.

(2) En déduire que la suite (v_n) est croissante, puis qu'elle est convergente.

On a $g(x) - x = -\frac{(x-1)(x+2)}{x+3}$, qui est positif pour tout $x \in]-1, 1[$. D'après le cours, la suite (v_n) est donc croissante. Étant majorée par 1, elle converge. Sa limite est le seul point fixe de $[-1, 1]$, c'est donc 1.

Question bonus (2 points) : calculer la limite de la suite $v_n = n\sin(\pi u_n)$.

Dans la question 4 (2) on a obtenu $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$. Comme f est continue, on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_{2n}) = f(\lim_{n\to+\infty} u_{2n}) = f(1) = 1.$$

Ces deux limites impliquent $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ (vu en TD). Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin(\pi u_n)}{u_n - 1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin(\pi u_n) - \sin(\pi.1)}{u_n - 1}\right) = \sin(\pi x)'_{x=1} = \pi\cos(\pi.1) = -\pi.$$

Fixons $\epsilon > 0$. La limite ci-dessus implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$-\pi - \epsilon \leq \frac{\sin(\pi u_n)}{u_n - 1} \leq -\pi + \epsilon.$$

Prenons $\epsilon = 1$ (par exemple). Alors la question 2 (3) montre que pour tout $n \geq N$ on a

$$|\sin(\pi u_n)| \leq (\pi + 1)|u_n - 1| \leq (\pi + 1)\left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty+\infty} n\left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$ (par croissances comparées), on déduit $\lim_{n\to+\infty+\infty} n\sin(\pi u_n) = 0$.