MODULE HAX201X
ANNÉE 2023/2024

CC1, 18 mars 2024
Durée : 1 h 10

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Le barème est indicatif.

Questions de cours (9 points)

1. Déterminer la limite (où $n \in \mathbb{N}$) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^8 \ln(n) + 5\cos(n)}{e^n + 1}.$$

2. Soit (u_n) une suite réelle croissante et non majorée. Écrire avec des quantificateurs ces deux propriétés, puis montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. Exhiber une suite qui admet trois valeurs d'adhérence distinctes.

4. Donner la définition d'une suite de Cauchy. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

Exercice (14 points)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{2}{x+1}$, et la suite (u_n) définie par $u_0 > -1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Vérifier que $f(]-1,+\infty[) \subset]-1,+\infty[$. En déduire que la suite (u_n) est bien définie, et déterminer ses limites potentielles.

2. Dans cette question uniquement, on fixe le choix $u_0 = 2$. Représenter le graphe de f, la droite d'équation $y = x$, ainsi que u_1, u_2 et u_3.

3. Dans cette question on suppose que $u_0 \in [\frac{1}{2}, 2]$.

(1) Montrer que $f([\frac{1}{2}, 2]) \subset [\frac{1}{2}, 2]$.

(2) Montrer que $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{8}{9}|u_n - 1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Montrer que $|u_n - 1| \leq (\frac{8}{9})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) En déduire que (u_n) converge.

4. Dans cette question on suppose que $u_0 \in]-1,1[$, et on pose $v_n = u_{2n}$.

(1) Montrer que (v_n) est une suite récurrente pour une fonction $g\colon]-1,1[\to]-1,1[$ que l'on précisera.

(2) En déduire que la suite (v_n) est croissante, puis qu'elle est convergente.

Question bonus (2 **points**) : calculer la limite de la suite $v_n = n\sin(\pi u_n)$