Examen terminal du cours de mathématiques pour économistes (questions de révision) :

1. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ définie sur R^n. Donner la formule définissant la dérivée partielle d'ordre 1 de cette fonction par rapport à la variable x_2.

2. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ définie sur R^n. Si cette fonction est additivement séparable, quelle est la forme de cette fonction ? Que pouvez vous en conclure concernant ses dérivées partielles d'ordre 1? Donner un exemple numérique d'une telle fonction lorsque n=2.

3. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ définie sur R^n. Si cette fonction est additivement séparable et linéaire par rapport à chaque variable, que pouvez vous en conclure concernant ses dérivées partielles d'ordre 1? Donner un exemple numérique d'une telle fonction lorsque n=2.

4. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,\dots,x_i,\dots x_n)$ définie sur R^n. Donner la formule définissant, par la limite, la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la variable x_i.

5. Considérer une fonction de production à deux variables y=f(L,K), définie sur R^2_{++}, où L et K représentent le travail et le capital, respectivement. D'un point de vue économique, que représentent ses dérivées partielles d'ordre 1 ? D'un point de vue économique, que représente le ratio des dérivées partielles d'ordre 1?

6. Considérer une fonction de production à deux variables y=f(L,K), définie sur R^2_{++}, où L et K représentent le travail et le capital, respectivement. Donner la forme générale que prend cette fonction, ainsi que les restrictions concernant les valeurs de ses paramètres, lorsqu'elle est de type Cobb-Douglas. Calculer f_L et f_K. Calculer le ratio f_K/f_L.

7. Considérer une fonction de production à deux variables y=f(L,K), définie sur R^2_{++}, où L et K représentent le travail et le capital, respectivement. Donner la forme générale que prend cette fonction, ainsi que les restrictions concernant les valeurs de ses paramètres, lorsqu'elle est de type CES (Constant Elasticity of Substitution). Calculer f_L et f_K. Calculer le ratio f_K/f_L.

8. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ définie sur R^n. Combien de dérivées partielles d'ordre 2 possède cette fonction ?`

9. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ définie sur R^n. Ecrire le gradient et la matrice Hessienne de cette fonction.

10. Pourquoi la matrice Hessienne d'une fonction à plusieurs variables est toujours symétrique ? De quel Théorème est-ce la conséquence ?

11. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Si cette fonction est additivement séparable, que pouvez vous en conclure concernant ses dérivées partielles d'ordre 2? Quelle est la forme particulière de sa matrice Hessienne ?

12. Considérer une fonction de production à deux variables $y=f(L,K)=A(L)^{\beta}(K)^{\alpha}$, définie sur R^2_{++}, où $L>0$ et $K>0$ représentent le travail et le capital, respectivement, et où A, α et β sont des constantes telles que $A>0$ et $0<\alpha,\beta<1$. Calculer le gradient et la matrice Hessienne de cette fonction. Donner le signe des termes du gradient et de la matrice Hessienne. Donner une interprétation économique de ces signes.

13. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Donner la formule de sa différentielle totale d'ordre 1.

14. On considère une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)= x_1x_2$ définie sur R^2. Calculer sa différentielle totale d'ordre 1. Utiliser la différentielle totale pour calculer la variation de y lorsque l'on passe du point (1,1) au point (6,5). Utiliser la différentielle totale pour calculer la variation de y lorsque l'on passe du point (1,1) au point (1.3,1.2). Comparer ces résultats avec les variations exactes de la fonction. Commenter.

15. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Ecrire cette fonction sous la forme d'une fonction implicite F. En utilisant le Théorème des fonctions implicites, écrire f_2 en fonction des dérivées partielles de F.

16. On considère une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. Comment obtenir l'équation d'une courbe de niveau y_0 dans le repère (x_1,x_2). En utilisant la différentielle totale d'ordre 1, calculer la pente de la courbe de niveau y_0 dans le repère (x_1,x_2).

17. On considère une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. Calculer la différentielle totale d'ordre 2.

18. On considère une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. Si la différentielle totale d'ordre 2 est nulle en tout point, que pouvez-vous en conclure concernant la représentation graphique de f?

19. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Si la différentielle totale d'ordre 2 est strictement négative en tout point, que

pouvez-vous en conclure ? Si cette différentielle est strictement positive en tout point, que pouvez-vous en conclure ?

20. On considère une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. Ecrire les sous matrices principales d'ordre 1 et 2 de la matrice Hessienne.

21. On considère une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. Ecrire les sous matrices principales successives d'ordre 1 et 2 de la matrice Hessienne.

22. On considère une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. Calculer le déterminant de la matrice Hessienne.

23. On considère une fonction à 3 variables $y=f(x_1,x_2,x_3)$ définie sur R^3. Ecrire les sous matrices principales d'ordre 1, 2 et 3 de la matrice Hessienne.

24. On considère une fonction à 3 variables $y=f(x_1,x_2,x_3)$ définie sur R^3. Ecrire les sous matrices principales successives d'ordre 1, 2 et 3 de la matrice Hessienne.

25. On considère une fonction à 3 variables $y=f(x_1,x_2,x_3)$ définie sur R^3. Calculer le déterminant de la matrice Hessienne.

26. Si la matrice Hessienne d'une fonction à plusieurs variables est définie négative, que pouvez-vous en conclure concernant la courbure de cette fonction ?

27. Si la matrice Hessienne d'une fonction à plusieurs variables est semi-définie négative, que pouvez-vous en conclure concernant la courbure de cette fonction ?

28. Si une fonction à plusieurs variables est concave, que pouvez-vous en conclure concernant la matrice Hessienne ? Que pouvez-vous en conclure concernant les déterminants des sous matrices principales de la matrice Hessienne ?

29. Si une fonction à plusieurs variables est convexe, que pouvez-vous en conclure concernant la matrice Hessienne ? Que pouvez-vous en conclure concernant les déterminants des sous matrices principales de la matrice Hessienne ?

30. Si les déterminants des sous matrices principales successives de la matrice Hessienne d'une fonction à plusieurs variables sont tous strictement positifs, que pouvez-vous en conclure concernant la courbure de la fonction?

31. Si les déterminants des sous matrices principales successives de la matrice Hessienne d'une fonction à plusieurs variables alternent en signe en

commençant par un signe strictement négatif, que pouvez-vous en conclure concernant la courbure de la fonction?

32. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Si cette fonction est additivement séparable. Sous quelles conditions est-elle concave ? Sous quelles conditions est-elle convexe ?

33. Considérer une fonction de production à deux variables $y=f(x_1,x_2)=A(x_1)^{\alpha}(x_2)^{\beta}$, définie sur R^2_{++}, où A, α et β sont des constantes telles que $A>0$ et $0<\alpha,\beta<1$. Montrer que cette fonction est strictement concave si $\alpha+\beta<1$.

34. On considère une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. Si cette fonction est quasi-concave, que pouvez-vous en conclure concernant la forme de ses courbes de niveau ?

35. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Ecrire la matrice Hessienne bordée de cette fonction.

36. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Si cette fonction est homogène de degré k, que pouvez-vous en déduire ?

37. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n et homogène de degré k. Que nous apprend le Théorème d'Euler ?

38. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Ecrire les conditions du premier ordre.

39. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Si le point $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ est un maximum local, est-il nécessairement un point stationnaire vérifiant les conditions du premier ordre ? Commenter.

40. On considère une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. Si le point (x_1^*,x_2^*) est un point selle, qu'est-ce que cela signifie ? Est-il nécessairement un point stationnaire vérifiant les conditions du premier ordre ? Commenter.

41. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Si le point $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ vérifie $f_i=0$ pour tout $i=1,\ldots,n$, et $d^2y<0$, que pouvez-vous en conclure ?

42. On considère une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Si le point $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ vérifie $f_i=0$ pour tout $i=1,\ldots,n$, et $d^2y>0$, que pouvez-vous en conclure ?

43. On considère une fonction strictement concave à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ soit un unique maximum global ?

44. On considère une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. Si le point (x_1^*,x_2^*) vérifie $f_i=0$ pour tout $i=1,\ldots,n$, et $f_{11}<0$ et $f_{22}<0$. Expliquer pourquoi cela ne garantit pas que ce soit un maximum local.

45. On considère le problème de maximisation d'une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. On impose $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Si un point $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ est solution de ce problème, quelles sont les conditions de premier ordre ?

46. On considère le problème de minimisation d'une fonction à n variables $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. On impose $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Si un point $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ est solution de ce problème, uelles sont les conditions de premier ordre ?

47. On considère le problème de maximisation d'une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. On impose la contrainte $g(x_1,x_2)=0$ définie sur R^2. Si un point de tangence (x_1^*,x_2^*) est solution de ce problème, quelles sont les deux conditions qui doivent être vérifiées ?

48. On considère le problème de maximisation d'une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. On impose la contrainte $g(x_1,x_2)=0$ définie sur R^2. Ecrire le lagrangien associé à ce problème. Ecrire les conditions du premier ordre. Si un point de tangence (x_1^*,x_2^*) est solution de ce problème, en déduire que $f_1(x_1^*,x_2^*)/f_2(x_1^*,x_2^*)=g_1(x_1^*,x_2^*)/g_2(x_1^*,x_2^*)$ et que $g(x_1^*,x_2^*)=0$. Interpréter graphiquement ces deux conditions.

49. Au point solution d'un problème d'optimisation contraint, que mesure la valeur du multiplicateur de Lagrange ?

50. Donner un exemple d'un sous-ensemble de R qui soit non-vide, fermé et borné.

51. Donner un exemple d'un sous-ensemble de R qui soit non-vide, fermé et non-borné.

52. Donner un exemple d'un sous-ensemble de R qui soit non-vide, ouvert et borné.

53. On considère le problème de maximisation d'une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. On impose la contrainte $g(x_1,x_2)=0$ définie sur R^2.

Représenter graphiquement, dans le repère (x_1,x_2), un maximum local qui ne soit pas un maximum global lorsque f est strictement quasi-concave.

54. On considère le problème de maximisation d'une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. On impose la contrainte $g(x_1,x_2)=0$ définie sur R^2. Représenter graphiquement, dans le repère (x_1,x_2), un maximum local qui ne soit pas un maximum global lorsque g est strictement quasi-convexe.

55. On considère le problème de maximisation d'une fonction à 2 variables $y=f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. On impose la contrainte $g(x_1,x_2)=0$ définie sur R^2. Représenter graphiquement, dans le repère (x_1,x_2), un maximum local qui soit également un unique maximum global lorsque f est strictement quasi-concave et g est strictement quasi-convexe.

56. Dans un modèle économique, qu'est-ce qu'une variable endogène ? Qu'est-ce qu'une variable exogène ? Donner un exemple de modèle.

57. En quoi consiste la résolution d'un modèle économique? Répondre en évoquant les variables endogènes et exogènes.

58. En quoi consiste la statique comparative appliquée à un modèle économique? Répondre en évoquant les variables endogènes et exogènes.

59. Considérer un modèle économique simple avec une variable endogène et une variable exogène. Procéder à une analyse de statique comparative.

60. Dans un problème d'optimisation contraint, qu'est-ce que la fonction de valeur. Que nous apprend le Théorème de l'enveloppe ?

Le sujet de l'examen terminal du cours de mathématiques pour économistes sera constitué de deux parties. Une première partie sur 10 points sera constituée de 10 questions (chacune sur un 1 point) tirées des questions ci-dessus. Une seconde partie sur 10 points sera constituée d'exercices tirés des exemples du cours.