Correction du CC1 du 07/03/2024

Exercice 1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue f.

(1) Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f, alors pour toute suite (x_n) de points de I qui converge vers $x \in I$, la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

On a $f_n(x_n) - f(x) = f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)$ et donc

$$|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $|f_n(x_n) - f(x_n)| \le \sup_{t\in I} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_\infty$, on obtient

$$(\star) \qquad |f_n(x_n) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme f est continue, la suite $|f(x_n) - f(x)|$ tend vers 0, et comme (f_n) converge uniformément vers f, la suite $\|f_n - f\|_\infty$ converge aussi vers 0. L'inégalité $(\star)$ permet de conclure que la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

(2) Expliciter une suite de fonctions (f_n) et une suite (x_n) de points de I, tels que (x_n) converge vers $x \in I$ alors que la suite $(f_n(x_n))$ ne converge pas vers $f(x)$.

On prend la suite de fonctions continues $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, \quad \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2n}[, \\ 1 - nx, \quad \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}[, \\ 0, \quad \text{si} \quad x \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

pour tout $n \ge 1$. On vérifie que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, tandis que $(f_n(\frac{1}{2n}))$ converge vers $\frac{1}{2} \neq 0$.

(3) Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f, alors $(\sqrt{|f_n|})$ converge uniformément vers $\sqrt{|f|}$. *On montrera au préalable que* $|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\,| \le \sqrt{|a-b|}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

La symétrie entre a et b permet de voir que la phrase

$$|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\,| \le \sqrt{|a-b|}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

est équivalente à $(\clubsuit) \quad \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \le \sqrt{|a-b|}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$. Maintenant, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a les implications

$$\begin{aligned} \sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \le \sqrt{|a-b|} &\iff \sqrt{|a|} \le \sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b|}, \\ &\iff |a| \le |a-b| + |b| + 2\sqrt{|a-b|}\sqrt{|b|}, \\ &\Longleftarrow |a| \le |a-b| + |b|. \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant toujours satisfaite, la relation $(\clubsuit)$ est démontrée.

Considérons maintenant une suite (f_n) qui converge uniformément vers f sur l'intervalle I. La relation

$$\left|\sqrt{|f_n(x)|} - \sqrt{|f(x)|}\,\right| \leq \sqrt{|f_n(x) - f(x)|}, \qquad \forall x \in I$$

permet de montrer que

$$\left\|\sqrt{|f_n|} - \sqrt{|f|}\,\right\|_\infty \leq \sqrt{\|f_n - f\|_\infty}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, on obtient $\lim_{n\to\infty} \left\|\sqrt{|f_n|} - \sqrt{|f|}\,\right\|_\infty = 0$. On a montré que la suite $(\sqrt{|f_n|})$ converge uniformément vers $\sqrt{|f|}$.

(4) Expliciter une suite (f_n) qui converge uniformément vers f, mais pour laquelle (f_n^2) ne converge pas uniformément vers f^2.

Il suffit de prendre $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ qui converge uniformément vers $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$. Maintenant, la fonction

$$f_n(x)^2 - f(x)^2 = \tfrac{2x}{n} + \tfrac{1}{n^2},$$

n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, c'est à dire $\|f_n^2 - f^2\|_\infty = +\infty$. Cela montre (f_n^2) ne converge pas uniformément vers f^2.

Exercice 2 Montrer qu'il existe une suite de polynômes $S := (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la propriété suivante : S converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$ et converge uniformément vers la fonction constante égale à 1 sur $[2,3]$. *On montrera qu'il existe une fonction continue sur* $[0,3]$*, nulle sur* $[0,1]$ *et constante égale à* 1 *sur* $[2,3]$.

Donner un exemple d'une telle suite.

Considérons la fonction continue $F : [0,3] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in [0,1], \\ x-1, & \text{si} \quad x \in]1,2[, \\ 1, & \text{si} \quad x \in [2,3]. \end{cases}$$

D'après la théorème de Weiertrass, il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers F sur l'intervalle $[0,3]$. Alors, la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$ et converge uniformément vers la fonction constante égale à 1 sur $[2,3]$.

Posons $G(x) = F(3x)$, $x \in [0,1]$ et considérons la suite de polynômes de Bernstein associée à la fonction continue $G : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k G(\tfrac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}.$$

On sait que (B_n) converge uniformément vers G sur l'intervalle $[0,1]$. Cela implique que

$$P_n(t) = B_n(\tfrac{t}{3}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k F(\tfrac{3k}{n}) (\tfrac{t}{3})^k (1 - \tfrac{t}{3})^{n-k}$$

est une suite de polynômes qui converge uniformément vers F sur l'intervalle $[0,3]$.

Exercice 3 Étudiez la convergence simple, uniforme, et uniforme sur les compacts des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies ci-dessous.

1. $f_n(x) = \frac{n^2 x}{n^2+x^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

On voit que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f_n(x) - f(x) = \frac{-x^3}{n^2+x^2}$. Ainsi $\lim_{x\to\pm\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$ et donc $\|f_n - f\|_\infty = +\infty$. La suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{C}{n^2}$$

avec $C = \max\{|a|^3, |b|^3\}$. Cela montre que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

2. $f_n(x) = e^{-nx} \ln(n + x)$, pour $x \in [1, +\infty[$.

On voit que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \geq 1$: la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[1, +\infty[$.

Les fonctions f_n prennent des valeurs positives. Vérifions que les fonctions f_n sont décroissantes. On a pour tout $x \geq 1$ et tout $n \geq 1$:

$$f_n'(x) = -ne^{-nx} \ln(n + x) + \frac{e^{-nx}}{n + x} = ne^{-nx}\Big(\frac{1}{n(n + x)} - \ln(n + x)\Big).$$

Si $x, n \geq 1$ alors $\frac{1}{n(n+x)} \leq \frac{1}{2} \leq \ln(2) \leq \ln(n + x)$. On a montré que $f_n'(x) < 0, \forall x, n \geq 1$.

On a donc $\|f_n\|_\infty = f_n(1) = e^{-n} \ln(n + 1)$, $\forall n \geq 1$. Cela montre que f_n converge uniformément vers la fonction nulle sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, f_n converge uniformément vers la fonction nulle sur tout compact de $[1, +\infty[$.

3. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n^2})^n$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Dès que $n > \sqrt{|x|}$, on a $\frac{x}{n^2} \in]-1, 1[$ et on peut écrire

$$f_n(x) = (1 + \tfrac{x}{n^2})^n = \exp(n \ln(1 + \tfrac{x}{n^2})).$$

Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 1$, pour tout $n \geq 1$. Si $x \neq 0$, alors $\ln(1 + \frac{x}{n^2}) = \frac{x}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ et donc

$$f_n(x) = \exp(\tfrac{x}{n} + o(\tfrac{1}{n})).$$

Cela montre que (f_n) converge simplement vers la fonction f constante égale à 1.

La fonction $f_n - f$ est un polyôme de degré n. Ainsi $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$: cela implique que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

Considérons la suite de fonctions $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, $x \in [a, b]$. La dérivée g_n' est positive sur $[a, b]$ dès que $n > \sqrt{\max(|a|, |b|)}$. Comme $g_n(0) = 0$, on en déduit que g_n est positive sur $[a, b]$ dès que $n > \sqrt{\max(|a|, |b|)}$. Cela montre que

$$\sup_{x\in[a,b]} |g_n(x)| = g_n(b)$$

dès que $n > \sqrt{\max(|a|, |b|)}$. Comme $\lim_{n\to\infty} g_n(b) = 0$, on peut conclure que (f_n) converge uniformément vers la fonction $f = 1$ sur tout compact.