L2 Mathématiques — Université de Montpellier
HAX403X Analyse 4 — Année universitaire 2023-2024

Contrôle continu 1
Jeudi 7 mars 2024, 1h10

Tous documents et appareils électroniques sont interdits.

La notation tiendra compte de la précision de vos arguments.
En particulier, si vous utilisez un résultat du cours, énoncez et vérifiez toutes ses hypothèses.

Exercice 1 (8 points)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue f.

1. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f, alors pour toute suite (x_n) de points de I qui converge vers $x \in I$, la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.
2. Expliciter une suite de fonctions (f_n) et une suite (x_n) de points de I, tels que (x_n) converge vers $x \in I$ alors que la suite $(f_n(x_n))$ ne converge pas vers $f(x)$.
3. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f, alors $(\sqrt{|f_n|})$ converge uniformément vers $\sqrt{|f|}$. *On montrera au préalable que* $|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\,| \leq \sqrt{|a-b|}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
4. Expliciter une suite (f_n) qui converge uniformément vers f, mais pour laquelle (f_n^2) ne converge pas uniformément vers f^2.

Exercice 2 (3 points)

Montrer qu'il existe une suite de polynômes $S := (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la propriété suivante : S converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$ et converge uniformément vers la fonction constante égale à 1 sur $[2,3]$. *On montrera qu'il existe une fonction continue sur* $[0,3]$*, nulle sur* $[0,1]$ *et constante égale à* 1 *sur* $[2,3]$.
Donner un exemple d'une telle suite.

Exercice 3 (9 points)

Étudiez la convergence simple, uniforme, et uniforme sur les compacts des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies ci-dessous :

1. $f_n(x) = \frac{n^2 x}{n^2 + x^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = e^{-nx}\ln(n+x)$, pour $x \in [1, +\infty[$.
3. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n^2})^n$, pour $x \in \mathbb{R}$.