Université de Montpellier & Polytech
L1 PEIP HA8201H Mathématiques

TD 9 : Développements limités

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Exercice 1 :

1. Donner un exemple de fonction continue et non dérivable à l'origine.
2. Donner un exemple de fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ qui n'est pas deux fois dérivable à l'origine.
3. Soit $n \geq 1$. Donner un exemple de fonction $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ qui n'est pas $n+1$ fois dérivable à l'origine.

Exercice 2 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Parmi les assertions suivantes, laquelle/lesquelles est/sont toujours vraie/s si f est un polynôme ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 0,$
2. $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 0,$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 0,$
4. $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 0.$

Exercice 3 :
Pour chacune des formules suivantes, préciser sur quel intervalle la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ et donner une formule générale pour les dérivées successives.

1. $f(x) = \ln(1+x),$
2. $f(x) = x^6,$
3. $f(x) = \exp(x),$
4. $f(x) = \cos(x),$
5. $f(x) = \sqrt{x}.$

Exercice 4 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que les restrictions de f à $]-\infty, 0[$ et à $]0, +\infty[$ sont $\mathcal{C}^\infty$.

On veut maintenant montrer par récurrence que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe un polynôme p_n tel que
$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} \exp(-1/x), \quad \forall x > 0.$$
   (a) Calculer $f^{(n+1)}(x)$ pour $x < 0$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme p_{n+1} tel que
   $$f^{(n+1)}(x) = \frac{p_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} \exp(-1/x), \quad \forall x > 0.$$
   (c) Montrer que $f^{(n)}$ est dérivable à l'origine.
4. Conclure.

Calculs de développements limités

Exercice 5 :
Calculer les développements limités en l'origine suivants :
1. développement limité à l'ordre 4 de $f(x) = \cos(x) + 2\ln(1 + x)$,
2. développement limité à l'ordre 5 de $f(x) = \sqrt{1 + x} - \sin(x)$,
3. développement limité à l'ordre 4 de $f(x) = x + x^3 + \arctan(x)$.

Exercice 6 :
Calculer les développements limités suivants :
1. développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$,
2. développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \arcsin(\ln(x))$,
3. développement limité en $\pi/3$ à l'ordre 3 de $f(x) = \exp(\sin(x))$.

Exercice 7 :
Calculer les développements limités en l'origine suivants :
1. développement limité à l'ordre 4 de $f(x) = \cos(x) \exp(x)$,
2. développement limité à l'ordre 9 de $f(x) = [\sin(x)]^6$,
3. développement limité à l'ordre 4 de $f(x) = [\ln(1 + x)]^2$.

Exercice 8 :
Calculer les développements limités en l'origine suivants :
1. développement limité à l'ordre 4 de $f(x) = 1/\cos(x)$,
2. développement limité à l'ordre 5 de $f(x) = \tan(x)$,
3. développement limité à l'ordre 5 de $f(x) = \ln(3\exp(x) + \exp(-x))$.

Exercice 9 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Dans un repère orthonormé, tracer le grape de f et le graphe de la partie principale de ses développements limités à l'origine à l'ordre 1, 2 et 3.

Exercice 10 :
On veut calculer la valeur de $\ln(1/2)$ à 10^{-2} près.

1. Écrire la formule de Taylor à l'origine avec reste intégral de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.
2. Quelle valeur de n faut-il choisir pour que le reste soit inférieur à 10^{-2} en valeur absolue pour $x = -1/2$?
3. Donner la valeur décimale de $\ln(1/2)$ à 10^{-2} près.

Exercice 11 :
Déterminer si les fonctions f suivantes admettent des limites en 0 et les calculer le cas échéant.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{1+x^2} - \cos(x)\right)$,
2. $f(x) = \dfrac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{(\sin(x))^2} - \dfrac{1}{(\sinh(x))^2}$,
4. $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$

Exercice 12 :
Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$\varphi_x(h) = \frac{au(x+h) + bu(x-h) + u(x)}{h^2}, \quad \forall h \neq 0.$$

Déterminer (a,b) pour que φ_x admette une limite quand $h \to 0$ et calculer alors cette limite.