Université de Montpellier & Polytech
L1 PEIP HA8201H Mathématiques

TD 8 : Intégration

Subdivisions et fonctions étagées

Exercice 1 :
Déterminer si les suites suivantes définissent une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$.

1. $(0, 0.1, 0.2, 0.8)$,
2. $(0.1, 0.2, 0.9, 1)$,
3. $(0, 0.7, 0.5, 0.8, 1)$,
4. $x_k = k/N$, $k \in \{0, \ldots, N\}$,
5. $x_k = 1 - 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :
Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a + x(b-a). \end{aligned}$$

Étant donné $(x_0, \ldots, x_N)$ une subdivision de $[0, 1]$, montrer que $(\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_N))$ est une subdivision de l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 3 :
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont en escalier ?

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ 0, & \text{si } x \in]1/2, 3/4], \\ 2, & \text{sinon}, \end{cases}$$

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 3x, & \text{si } x \in [0, 1/3[, \\ 1, & \text{si } x \in]1/3, 2/3[, \\ 1-x, & \text{sinon}, \end{cases}$$

$h : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} n, & \text{si } x \in]1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1}[, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Exercice 4 :
Soient $f, g \in Esc([0, 1])$.

1. Montrer que $f + g \in Esc([0, 1])$.
2. Montrer que $|f| \in Esc([0, 1])$.

Fonctions intégrables

Exercice 5 :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ croissante. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on fixe

$$f_N^+(x) = f((k+1)/N), \qquad \forall x \in [k/N,(k+1)/N[, \quad \forall k = 0,\dots,N-1,$$
$$f_N^-(x) = f(k/N), \qquad \forall x \in [k/N,(k+1)/N[, \quad \forall k = 0,\dots,N-1.$$

1. Illustrer la construction de f_N^+ et de f_N^- sur un dessin.
2. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, f_N^+ et de f_N^- sont en escalier.
3. Montrer que
$$\int_0^1 \left(f_N^+(t) - f_N^-(t)\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{N}(f(1) - f(0)).$$
4. En déduire que $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$.

Exercice 6 :
Soient $f, g \in \mathcal{L}^1([0,1])$.
1. Montrer que $f + g \in \mathcal{L}^1([0,1])$.
2. Montrer que $x \mapsto \max(f(x), 0) \in \mathcal{L}^1([0,1])$.

Exercice 7 :
Soient deux réels a, b tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(c)(b-a).$$

Calculs d'intégrales

Exercice 8 :
Soit $f(x) = 1/(1+x^2)$ définie pour $x \in [0,1]$ et

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \le u_n \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 9 :
Dans chacun des cas suivants, donner le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction et calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \int_x^{3x} e^{\sin(t)} \mathrm{d}t$,
2. $f(x) = \int_1^x \sqrt{1 + |\ln(t)|^2} \mathrm{d}t$,
3. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t - 2t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 10 :
Dans chacun des cas suivants, calculer les primitives de la fonction f et déterminer les intervalles sur lesquels ces primitives sont bien définies.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + x - 6}$,
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$,
4. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + x - 6}$,
5. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$,
6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 5}$,

Exercice 11 :
Dans chacun des cas suivants, calculer les primitives de la fonction f et déterminer les intervalles sur lesquels ces primitives sont bien définies.

1. $f(x) = x \exp(-3x^2)$,
2. $f(x) = \sin^2(x) \cos^3(x)$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{3 + \exp(-x)}$,
4. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x}}$,
5. $f(x) = x^2 \ln(x)$,
6. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln(x)}$.

Exercice 12 :
Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) \mathrm{d}x$,
2. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \dfrac{1}{\cos(x)} \mathrm{d}x$,
3. $\int_0^{\pi/4} \dfrac{\sin(2x)}{1 + \cos^2(x)} \mathrm{d}x$,
4. $\int_0^1 \dfrac{\arctan(t)}{1 + t^2} \mathrm{d}t$,

5. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \exp(t)\cos(t)\mathrm{d}t$,
6. $\int_0^1 \dfrac{\exp(t)}{\sqrt{\exp(t)+1}}\mathrm{d}t$.

Exercice 13 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^{\pi/2} [\sin(t)]^n \mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}.$$