
TD 8 : Intégration

Subdivisions et fonctions étagées

Exercice 1 :

Déterminer si les suites suivantes définissent une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$.

1. $(0, 0.1, 0.2, 0.8)$,
2. $(0.1, 0.2, 0.9, 1)$,
3. $(0, 0.7, 0.5, 0.8, 1)$,
4. $x_k = k/N, k \in \{0, \dots, N\}$,
5. $x_k = 1 - 1/2^k, k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a + x(b - a). \end{aligned}$$

Étant donné (x_0, \dots, x_N) une subdivision de $[0, 1]$, montrer que $(\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_N))$ est une subdivision de l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 3 :

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont en escalier ?

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} & g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ 0, & \text{si } x \in]1/2, 3/4], \\ 2, & \text{sinon,} \end{cases} & x &\mapsto \begin{cases} 3x, & \text{si } x \in [0, 1/3[, \\ 1, & \text{si } x \in]1/3, 2/3[, \\ 1 - x, & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} n, & \text{si } x \in]1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1}[, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4 :

Soient $f, g \in Esc([0, 1])$.

1. Montrer que $f + g \in Esc([0, 1])$.
2. Montrer que $|f| \in Esc([0, 1])$.

Exercice 5 :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on fixe

$$\begin{aligned} f_N^+(x) &= f((k+1)/N), & \forall x \in [k/N, (k+1)/N[, & \forall k = 0, \dots, N-1, \\ f_N^-(x) &= f(k/N), & \forall x \in [k/N, (k+1)/N[, & \forall k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

1. Illustrer la construction de f_N^+ et de f_N^- sur un dessin.
2. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, f_N^+ et de f_N^- sont en escalier.
3. Montrer que

$$\int_0^1 (f_N^+(t) - f_N^-(t)) dt = \frac{1}{N}(f(1) - f(0)).$$

4. En déduire que $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$.

Exercice 6 :

Soient $f, g \in \mathcal{L}^1([0, 1])$.

1. Montrer que $f + g \in \mathcal{L}^1([0, 1])$.
2. Montrer que $x \mapsto \max(f(x), 0) \in \mathcal{L}^1([0, 1])$.

Exercice 7 :

Soient deux réels a, b tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) dt = f(c)(b - a).$$

Exercice 8 :

Soit $f(x) = 1/(1+x^2)$ définie pour $x \in [0, 1]$ et

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que

$$\int_0^1 f(x) dx \leq u_n \leq \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 9 :

Dans chacun des cas suivants, donner le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction et calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \int_x^{3x} e^{\sin(t)} dt,$
2. $f(x) = \int_1^x \sqrt{1 + |\ln(t)|^2} dt,$
3. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t-2t^2} dt.$

Exercice 10 :

Dans chacun des cas suivants, calculer les primitives de la fonction f et déterminer les intervalles sur lesquels ces primitives sont bien définies.

1. $f(x) = \frac{1}{2x^2 + x - 6},$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1},$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5},$
4. $f(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 6},$
5. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1},$
6. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 5},$

Exercice 11 :

Dans chacun des cas suivants, calculer les primitives de la fonction f et déterminer les intervalles sur lesquels ces primitives sont bien définies.

1. $f(x) = x \exp(-3x^2),$
2. $f(x) = \sin^2(x) \cos^3(x),$
3. $f(x) = \frac{1}{3 + \exp(-x)},$
4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}},$
5. $f(x) = x^2 \ln(x),$
6. $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}.$

Exercice 12 :

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx,$
2. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)} dx,$
3. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1 + \cos^2(x)} dx,$
4. $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt,$

5. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \exp(t) \cos(t) dt,$

6. $\int_0^1 \frac{\exp(t)}{\sqrt{\exp(t) + 1}} dt.$

Exercice 13 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^{\pi/2} [\sin(t)]^n dt.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}.$$