
TD 7 : Dérivation, théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Dérivation

Exercice 1 :

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{si } x \neq 0, \quad f_1(0) = 0,$$

$$f_2(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{si } x \neq 0, \quad f_2(0) = 0,$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad \text{si } x \neq 1, \quad f_3(1) = 1.$$

Exercice 2 :

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

soit dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 3 :

En utilisant le nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{x}$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$,
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$,
4. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\exp(\cos(x)) - 1}{x - \pi/2}$.

Théorème de Rolle

Exercice 4 :

Montrer que le polynôme $x^n + ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ admet au plus trois racines réelles.

Exercice 5 :

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b[$.
2. Posons $p = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a, b]$.
Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.
En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, où l est un nombre réel. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = l.$$

4. Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 6 :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $d \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d, 0)$.

Théorème des accroissements finis

Exercice 7 :

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|,$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \leq e^x - 1 \leq xe^x.$

Exercice 8 :

Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$.

1. Montrer que

$$x < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < y.$$

2. On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\mapsto \ln(ax + (1-a)y) - a \ln(x) - (1-a) \ln(y). \end{aligned}$$

Faire l'étude de la fonction f et en déduire que pour tout $a \in]0, 1[$, on a

$$a \ln(x) + (1-a) \ln(y) < \ln(ax + (1-a)y).$$

Exercice 9 :

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Démontrer que

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln(n).$$

En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.