Université de Montpellier & Polytech L1 PEIP
HA8201H Mathématiques

TD 7 : Dérivation, théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Dérivation

Exercice 1 :
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{si } x \neq 0, \quad f_1(0) = 0,$$
$$f_2(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{si } x \neq 0, \quad f_2(0) = 0,$$
$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad \text{si } x \neq 1, \quad f_3(1) = 1.$$

Exercice 2 :
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 :
En utilisant le nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{3x+2} - e^2}{x}$,
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$,
3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln(2 - x)}{x - 1}$,
4. $\lim_{x \to \pi/2} \dfrac{\exp(\cos(x)) - 1}{x - \pi/2}$.

Théorème de Rolle

Exercice 4 :
Montrer que le polynôme $x^n + ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ admet au plus trois racines réelles.

Exercice 5 :
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b[$.
2. Posons $p = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$.
   Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.
   En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
   $$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, où l est un nombre réel. Montrer que
   $$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = l.$$
4. Calculer la limite suivante
   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 6 :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $d \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d,0)$.

Théorème des accroissements finis

Exercice 7 :
Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

Exercice 8 :
Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$.

1. Montrer que
   $$x < \frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < y.$$
2. On considère la fonction f définie par
   $$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto \ln(ax + (1-a)y) - a\ln(x) - (1-a)\ln(y). \end{aligned}$$
   Faire l'étude de la fonction f et en déduire que pour tout $a \in]0,1[$, on a
   $$a\ln(x) + (1-a)\ln(y) < \ln(ax + (1-a)y).$$

Exercice 9 :

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$
2. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$
$$v_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$
Démontrer que
$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln(n).$$
En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.