2.2 Intégrales et primitives

2.2.1 L'intégrale de Riemann : fonctions Riemann-intégrables

L'intégrale peut-être comprise comme une surface ou une aire. On fait un dessin pour une fonction positive, continue sur un intervalle $[a, b]$.
Si la fonction est constante $f(x) = c$, on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)c.$$

Pour $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, on a

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \text{aire du demi disque} = \frac{\pi}{2}.$$

Si la fonction prend des valeurs négatives, les aires situées sous l'axe sont comptées négativement. Comment écrit-on ça proprement ?

Les fonctions en escalier On commence par faire un dessin.
Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \leq b$. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une suite finie de réels

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

tels que pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ est constante.

Définition 26. *(Subdivision) Si f est une fonction en escaliers sur $[a, b]$, on appelle subdivision de $[a, b]$ adaptée à f toute suite $x_0 < \ldots < x_n$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, telle que $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ est constante pour $0 \leq k \leq n-1$.*

Remarque 16. *Si on intercale des points additionnels dans une subdivision adaptée, on obtient une nouvelle subdivision adaptée.*

Définition 27. *On note $Esc([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur l'intervalle $[a, b]$.*

Proposition 25. *$Esc([a, b])$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions sur $[a, b]$ (noté $\mathbb{R}^{[a,b]}$).*

On s'intéresse maintenant à l'intégrale d'une fonction en escalier. Soit $f \in Esc([a, b])$ et $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision adaptée. On a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).$$

Le facteur $(x_{k+1} - x_k)$ correspond à la largeur du rectangle et $f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$ la valeur (constante) de f sur $]x_k, x_{k+1}[$ (un petit dessin s'impose).

Proposition 26. *$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ainsi définie ne dépend pas du choix de la subdivision.*

Théorème 17. *1. L'application*

$$\begin{aligned}\varphi : Esc([a, b]) &\to \mathbb{R}\\ f &\mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire, autrement dit :

— *Pour tout* $f, g \in Esc([a,b])$, $\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,
— *Pour tout* $f \in Esc([a,b])$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2. *Si* $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$, *alors* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Convention : Si $a \leq b$, on note :
— $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
— $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Théorème 18. *(de Chasles) Soit* $f \in Esc([a,b])$. *Soient* $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$. *Alors*

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^\gamma f(x)\mathrm{d}x.$$

Fonctions intégrables (au sens de Riemann) Ce sont les fonctions qui peuvent être bien approchées par des fonctions en escalier. Un dessin (par exemple de $f(x) = x^2$) pour illustrer.

Définition 28. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *(*$a \leq b$*). On dit que* f *est intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe deux fonctions en escaliers* $u, U \in Esc([a,b])$ *telles que* $u \leq f \leq U$ *et* $\int_a^b (U-u)(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$.

Notation : on note $\mathcal{L}^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ \text{intégrable}\}$.
On admet les deux résultats suivants.

Théorème 19.
1. *L'ensemble* $\mathcal{L}^1([a,b])$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{[a,b]}$ *qui contient* $Esc([a,b])$.
2. *Toute fonction continue sur* $[a,b]$ *est intégrable sur* $[a,b]$.

Attention, il existe des fonctions qui ne sont pas intégrables.
Il n'est pas facile de calculer des exemples avec la définition. Plus tard, nous verrons que les primitives permettent de calculer simplement beaucoup d'intégrales.

Intégrale

Théorème 20. *Soit* $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$. *Alors*

$$\sup\{\int_a^b u(x)\mathrm{d}x;\ u \in Esc([a,b]);\ u \leq f\} = \inf\{\int_a^b U(x)\mathrm{d}x;\ U \in Esc([a,b]);\ U \geq f\}.$$

Cette valeur commune s'appelle l'intégrale de f *sur* a *à* b *et on la note*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Théorème 21. *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}^1([a,b]) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

a les propriétés suivantes :

1. *Elle est* $\mathbb{R}$*-linéaire.*

2. *Elle est croissante : si $f, g \in \mathcal{L}^1([a,b])$ sont telles que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

3. *On a la propriété de Chasles : si $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ et $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ alors*

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^\gamma f(x)\mathrm{d}x.$$

Corollaire 10. *Si $a \leq b$, on a*

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

2.2.2 Relation primitives-intégrales

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle réel. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Définition 29. *On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$.*

Remarque 17. *Une même fonction a en général une infinité de primitives. En effet si F est une primitive de f, il suffit de considérer une constante $c \in \mathbb{R}$ pour construire $F + c$ qui est encore une primitive de f.*
En fait, si F et G sont deux primitives de f, on a $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$. Donc $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Donc $G - F$ est une fonction constante.

Théorème 22. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de f, c'est-à-dire que F est dérivable et que $F'(x) = f(x)$. Par conséquent, pour une primitive F quelconque de f, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

On note $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Il n'est pas toujours possible de calculer une primitive d'une fonction donnée par une formule.

Exemple 8. *e^{-x^2} n'admet pas de primitive qu'on puisse exprimer par une formule à partir des fonctions classiques. Toutefois on peut calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est une primitive de e^{-x^2}.

$f(x)$	Primitives de f
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ (si $\alpha \neq -1$) et $\ln(x)$ si $\alpha = -1$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
e^x	e^x
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$ ou $-\arccos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

2.2.3 Méthodes de calculs de primitives

On utilise les dérivées de fonctions usuelles. On rappelle juste les formules.
On utilise deux techniques de calcul

— l'intégration par parties,

— le changement de variables.

Intégration par parties Puisque l'intégrale est linéaire, il en résulte que, si F est une primitive de f et G une primitive de g, alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$, où λ et μ sont des scalaires.
On procède par combinaison linéaire lorsqu'on cherche une primitive.

Exemple 9.

$$\int 2\cos(x) + 3\sin(x)\mathrm{d}x = 2\int \cos(x)\mathrm{d}x + 3\int \sin(x)\mathrm{d}x = 2\sin(x) - 3cos(x) + c.$$

Mais ce n'est plus vrai si λ et μ sont des fonctions.

Exemple 10. *x est une primitive de 1. x^2 est une primitive de $2x$ mais $x \cdot x^2$ n'est pas une primitive de $1 \cdot 2x$... On ne peut pas multiplier les primitives. Cela provient de la formule de Leibniz*

$$(FG)' = F'G + FG'.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 27. *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (continues, dérivables et de dérivées continues). Alors*

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + c.$$

Remarque : on peut toujours vérifier ses calculs en dérivant la primitive trouvée !

Changement de variables On commence par les changements de variables affines.
Soit F une primitive de f. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(ax+b) = aF'(ax+b) = af(ax+b).$$

Il en résulte que

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+c,$$

à condition que $a \neq 0$ bien sûr.
Soient I, J deux intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi = J \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit F primitive de f et $F : I \to \mathbb{R}$. Alors $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi'$, c'est-à-dire que $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int^{\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x.$$

On exploite ce résultat pour calculer des intégrales.

Proposition 28. *Soient $a, b \in I$ et supposons qu'il existe t_0 et $t_1 \in I$ tels que $a = \varphi(t_0)$ et $b = \varphi(t_1)$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction change, les bornes changent et la variable change (on passe de $a \leq x \leq b$ à $t_0 \leq t \leq t_1$).

Recherche de primitives d'un type particulier On va étudier les fonctions de type

- polynômes $\times \exp(\lambda x)$,
- polynômes $\times$ fonctions trigonométriques,
- fractions rationnelles,
- combinaison non linéaire de fonctions trigo (par linéarisation par la formule de Moivre).

Proposition 29. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ et*

$$\mathcal{E}_{n,\lambda} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto p(x)e^{\lambda x},\ \textit{où } p(x) \textit{ est une fonction polynomiale } \}.$$

Alors $\mathcal{E}_{n,\lambda}$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$ qui est stable par la dérivation. De plus l'application

$$\begin{aligned} D : \mathcal{E}_{n,\lambda} &\to \mathcal{E}_{n,\lambda} \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire et bijective.

Exemple 11. $f(x) = x^2e^x \in \mathcal{E}_{2,1}$.

Corollaire 11. *Toute fonction de la forme $p(x)e^{\lambda x}$ admet une unique primitive de la même forme.*

On s'intéresse maintenant à la variante trigonométrique.
Soit $w \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$T_{n,w} = \{p(x)\cos(wx) + q(x)\sin(wx);\ p, q \text{des fonctions polynomiales de degré au plus } n\}.$$

Proposition 30. *$T_{n,w}$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$ de dimension $2n+2$, stable par dérivation et l'application*

$$\begin{aligned} D : T_{n,w} &\to T_{n,w} \\ f &\mapsto f', \end{aligned}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire bijective.

On finit par les primitives de fonctions rationnelles.
Une fonction rationnelle est une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

où p et q sont des fonctions polynomiales et $q(x) \neq 0$ pour tout x.
Si f est un polynôme de degré n, f admet une primitive de degré $n+1$. Mais si $f(x) = 1/x$, la primitive est $\ln(x) + c$, ce n'est pas une fraction rationnelle.

Il y a une méthode générale. On se ramène à une fraction rationnelle réduite, de la forme $\frac{p(x)}{q(x)}$, avec $\deg(p) < \deg(q)$. Par exemple $1/x$, $1/(x-1)(x-2)$...
Soit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, avec p, q deux fonctions polynomiales, $q \neq 0$. La division euclidienne de p par q revient à écrire

$$p = aq + r,$$

où a et r sont des fonctions polynomiales, telles que $\deg(r) < \deg(q)$.
De manière générale, on a

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

où $a(x)$ est une fonction polynomiale et $\frac{r(x)}{q(x)}$ une fraction réduite.
Pour trouver une primitive d'une fraction p/q, il suffit de trouver une primitive de la fraction réduite r/q.

Éléments simples Ce sont les fractions réduites de la forme suivante

1. $\frac{1}{(x-a)^n}, \quad n \geq 1,$
2. $\frac{bx+c}{((x-a)^2+1)^n}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(b, c) \neq (0, 0)$ et $n \geq 1$.

Théorème 23. *(Admis) Toute fonction rationnelle réduite s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments simples.*

Il suffit alors de savoir calculer des primitives des éléments simples.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n} \mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{n+1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}}, & \text{si } n \neq 1, \\ \ln|x-a|, & \text{si } n = 1. \end{cases},$
2. $\displaystyle\int \frac{bx+c}{((x-a)^2+1)^n} \mathrm{d}x\,?$

Comment écrire une fraction réduite comme combinaison linéaire d'éléments simples ?
En général, on peut supposer que p et q sont premiers entre eux, quitte à simplifier la fraction. Alors les racines de q ne sont pas des racines de p. Pour $q(x) = a(x-\lambda_1)^{m_1} ... (x-\lambda_r)^{m_r}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les racines de q dans $\mathbb{C}$ et $m_1, \dots, m_r$ les multiplicités de ces racines. p/q s'écrit comme combinaison linéaire des éléments simples $\frac{1}{(x-\lambda_i)^k}$, $1 \leq k \leq m_i$.

Si les racines sont toutes réelles, on a donc une décomposition en éléments simples du premier type.

Linéarisation

Proposition 31. *La fonction* $\cos^n(x)\sin^p(x)$ *,* $n, p \in \mathbb{R}$ *s'écrit comme combinaison linéaire des fonctions*

$$\begin{cases} \cos(kx), & \textit{si } p \textit{ est pair,} \\ \sin(kx), & \textit{si } p \textit{ est impair.} \end{cases}$$

On utilise cette propriété pour intégrer $\displaystyle\int \cos^n(x)\sin^p(x)\mathrm{d}x$. On utilise la formule de Moivre

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \cos^n(x)\sin^p(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^p \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx}. \end{aligned}$$

2.2.4 Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $(a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$ telle que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. On appelle h le pas d'espace

$$h = \max_{0 \leq k \leq n-1} (a_{k+1} - a_k).$$

Définition 30. *On appelle somme de Riemann de* f *le réel*

$$\Sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(x_k),$$

où $x_k \in [a_k, a_{k+1}]$*. On a* $\Sigma(f) = \int_a^b c(x)\mathrm{d}x$*, où* c *est la fonction en escalier*

$$c(x) = \begin{cases} f(x_k), & \textit{si } x \in [a_k, a_{k+1}], \\ f(b), & \textit{si } x = b. \end{cases}$$

Théorème 24. *Si* f *est Riemann-intégrable,* $\Sigma(f)$ *tend vers* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *lorsque* $h \to 0$*. Plus précisément pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un* $\eta > 0$ *tel que si la subdivision est telle que* $h < \eta$*, alors*

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \Sigma(f) \right| \leq \varepsilon.$$

Corollaire 12. *Si* f *est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$*, alors telle que* $h < \eta$*, alors*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b - a)).$$