2.2 Intégrales et primitives

2.2.1 L'intégrale de Riemann : fonctions Riemann-intégrables

L'intégrale peut-être comprise comme une surface ou une aire. On fait un dessin pour une fonction positive, continue sur un intervalle $[a, b]$.
Si la fonction est constante $f(x) = c$, on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b - a)c.$$

Pour $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, on a

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \text{aire du demi disque} = \frac{\pi}{2}.$$

Si la fonction prend des valeurs négatives, les aires situées sous l'axe sont comptées négativement. Comment écrit-on ça proprement ?

Les fonctions en escalier On commence par faire un dessin.
Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \leq b$. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une suite finie de réels

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

tels que pour tout $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ est constante.

Définition 26. *(Subdivision) Si f est une fonction en escaliers sur $[a, b]$, on appelle subdivision de $[a, b]$ adaptée à f toute suite $x_0 < \ldots < x_n$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, telle que $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ est constante pour $0 \leq k \leq n - 1$.*

Remarque 16. *Si on intercale des points additionnels dans une subdivision adaptée, on obtient une nouvelle subdivision adaptée.*

Définition 27. *On note $Esc([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur l'intervalle $[a, b]$.*

Proposition 25. *$Esc([a, b])$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions sur $[a, b]$ (noté $\mathbb{R}^{[a,b]}$).*

Démonstration.
- $f_0 \in Esc([a, b])$: c'est clair car toute fonction constante est en escalier.
- Si $f \in Esc([a, b])$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in Esc([a, b])$ (car là où f est constante, λf l'est aussi).
- Si $f, g \in Esc([a, b])$, alors $f + g \in Esc([a, b])$. Idée de preuve. Soient $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ une subdivision adaptée de f et $y_0 < y_1 < \ldots y_p$ une subdivision adaptée de g. On définit une nouvelle subdivision

$$\{z_0, \ldots, z_m\} = \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_p\},$$

c'est une subdivision adaptée à la fois à f et à g et donc aussi à $f + g$. Puisque f et g sont constantes sur $]z_k, z_{k+1}[$, $f + g$ l'est aussi (un petit dessin aide toujours). □

On s'intéresse maintenant à l'intégrale d'une fonction en escalier. Soit $f \in Esc([a, b])$ et $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision adaptée. On a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).$$

Le facteur $(x_{k+1}-x_k)$ correspond à la largeur du rectangle et $f\left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ la valeur (constante) de f sur $]x_k, x_{k+1}[$ (un petit dessin s'impose).

Proposition 26. *$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ainsi définie ne dépend pas du choix de la subdivision.*

Théorème 17. *1. L'application*

$$\varphi : Esc([a,b]) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

est $\mathbb{R}$-linéaire, autrement dit :
- *Pour tout $f, g \in Esc([a,b])$, $\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,*
- *Pour tout $f \in Esc([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.*

2. Si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Convention : Si $a \leq b$, on note :
- $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Théorème 18. *(de Chasles) Soit $f \in Esc([a,b])$. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$. Alors*

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^\gamma f(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On se donne une subdivision adaptée pour démontrer le résultat. Et un dessin... □

Fonctions intégrables (au sens de Riemann) Ce sont les fonctions qui peuvent être bien approchées par des fonctions en escalier. Un dessin (par exemple de $f(x) = x^2$) pour illustrer.

Définition 28. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a \leq b$). On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers $u, U \in Esc([a,b])$ telles que $u \leq f \leq U$ et $\int_a^b (U-u)(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$.*

Notation : on note $\mathcal{L}^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ \text{intégrable}\}$.
On admet les deux résultats suivants.

Théorème 19. *1. L'ensemble $\mathcal{L}^1([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ qui contient $Esc([a,b])$.*

2. Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

Attention, il existe des fonctions qui ne sont pas intégrables.
Il n'est pas facile de calculer des exemples avec la définition. Plus tard, nous verrons que les primitives permettent de calculer simplement beaucoup d'intégrales.

Intégrale

Théorème 20. *Soit $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$. Alors*

$$\sup\{\int_a^b u(x)\mathrm{d}x;\ u \in Esc([a,b]);\ u \le f\} = \inf\{\int_a^b U(x)\mathrm{d}x;\ U \in Esc([a,b]);\ U \ge f\}.$$

Cette valeur commune s'appelle l'intégrale de f sur a à b et on la note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Théorème 21. *L'application*

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{L}^1([a,b]) &\to \mathbb{R}\\ f &\mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

a les propriétés suivantes :

1. *Elle est $\mathbb{R}$-linéaire.*
2. *Elle est croissante : si $f, g \in \mathcal{L}^1([a,b])$ sont telles que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \le g(x)$, alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

3. *On a la propriété de Chasles : si $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ et $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ alors*

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^\gamma f(x)\mathrm{d}x.$$

Corollaire 11. *Si $a \le b$, on a*

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On utilise que $f(x) \le |f(x)|$ et que $-f(x) \le |f(x)|$. □

2.2.2 Relation primitives-intégrales

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle réel. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Définition 29. *On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$.*

Remarque 17. *Une même fonction a en général une infinité de primitives. En effet si F est une primitive de f, il suffit de considérer une constante $c \in \mathbb{R}$ pour construire $F + c$ qui est encore une primitive de f.*
En fait, si F et G sont deux primitives de f, on a $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$. Donc $(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Donc $G - F$ est une fonction constante.

Théorème 22. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de f, c'est-à-dire que F est dérivable et que $F'(x) = f(x)$. Par conséquent, pour une primitive F quelconque de f, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

On note $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration. On essaie d'abord de visualiser pourquoi la fonction F est dérivable telle que $F'(x) = f(x)$. Fixons $x_0 \in [a, b]$. Par la relation de Chasles, on a

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Le taux d'accroissement vérifie

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{A}{x - x_0},$$

où A est l'aire sous la courbe de f. Si x est suffisamment proche de x_0, cette aire est presque un rectangle de superficie $(x - x_0)f(x_0)$. Lorsque $x \to x_0$, le taux d'accroissement tend donc vers $f(x_0)$. Autrement dit $F'(x_0) = f(x_0)$.
Démonstration rigoureuse. Comme $f(x_0)$ est une constante, alors

$$\int_{x_0}^x f(x_0)\mathrm{d}t = (x - x_0)f(x_0).$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}
\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que $(|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
Donc

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon \mathrm{d}t \right| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
Maintenant on sait que F est une primitive de f, F est même la primitive qui s'annule en a car $F(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$. Si G est une autre primitive, on sait qu $F = G + c$. Ainsi

$$G(b) - G(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

□

Il n'est pas toujours possible de calculer une primitive d'une fonction donnée par une formule.

Exemple 8. *e^{-x^2} n'admet pas de primitive qu'on puisse exprimer par une formule à partir des fonctions classiques. Toutefois on peut calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est une primitive de e^{-x^2}.

2.2.3 Méthodes de calculs de primitives

On utilise les dérivées de fonctions usuelles. On rappelle juste les formules.

$f(x)$	Primitives de f
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ (si $\alpha \neq -1$) et $\ln(x)$ si $\alpha = -1$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
e^x	e^x
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$ ou $-\arccos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

On utilise deux techniques de calcul
- — l'intégration par parties,
- — le changement de variables.

Intégration par parties Puisque l'intégrale est linéaire, il en résulte que, si F est une primitive de f et G une primitive de g, alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$, où λ et μ sont des scalaires.
On procède par combinaison linéaire lorsqu'on cherche une primitive.

Exemple 9.

$$\int 2\cos(x) + 3\sin(x)\mathrm{d}x = 2\int \cos(x)\mathrm{d}x + 3\int \sin(x)\mathrm{d}x = 2\sin(x) - 3cos(x) + c.$$

Mais ce n'est plus vrai si λ et μ sont des fonctions.

Exemple 10. *x est une primitive de 1. x^2 est une primitive de $2x$ mais $x \cdot x^2$ n'est pas une primitive de $1 \cdot 2x$... On ne peut pas multiplier les primitives. Cela provient de la formule de Leibniz*

$$(FG)' = F'G + FG'.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 27. *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (continues, dérivables et de dérivées continues). Alors*

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + c.$$

Démonstration. La dérivée de $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ est $(uv')(x)$ et celle de $u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ est $(uv)'(x) - u'(x)v(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x)$. □

Remarque : on peut toujours vérifier ses calculs en dérivant la primitive trouvée !

Changement de variables On commence par les changements de variables affines.
Soit F une primitive de f. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(ax+b) = aF'(ax+b) = af(ax+b).$$

Il en résulte que

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + c,$$

à condition que $a \neq 0$ bien sûr.
Soient I, J deux intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi = J \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit F primitive de f et $F : I \to \mathbb{R}$. Alors $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi'$, c'est-à-dire que $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int^{\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x.$$

On exploite ce résultat pour calculer des intégrales.

Proposition 28. *Soient $a, b \in I$ et supposons qu'il existe t_0 et $t_1 \in I$ tels que $a = \varphi(t_0)$ et $b = \varphi(t_1)$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction change, les bornes changent et la variable change (on passe de $a \leq x \leq b$ à $t_0 \leq t \leq t_1$).

Recherche de primitives d'un type particulier On va étudier les fonctions de type
- polynômes $\times \exp(\lambda x)$,
- polynômes $\times$ fonctions trigonométriques,
- fractions rationnelles,
- combinaison non linéaire de fonctions trigo (par linéarisation par la formule de Moivre).

Proposition 29. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ et*

$$\mathcal{E}_{n,\lambda} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto p(x)e^{\lambda x},\ \text{où } p(x) \text{ est une fonction polynomiale }\}.$$

Alors $\mathcal{E}_{n,\lambda}$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$ qui est stable par la dérivation. De plus l'application

$$\begin{aligned} D : \mathcal{E}_{n,\lambda} &\to \mathcal{E}_{n,\lambda} \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire et bijective.

Exemple 11. $f(x) = x^2 e^x \in \mathcal{E}_{2,1}$.

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{E}_{n,\lambda}$ est un sev de $C^1(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{E}_{n,\lambda}$, $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, où p est une fonction polynomiale de degré au plus n. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= p'(x)e^{\lambda x} + \lambda p(x)e^{\lambda x} \\ &= (p'(x) + \lambda p(x))e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Or $p' + \lambda p$ est un polynôme de degré identique à celui de p (car $\lambda \neq 0$). Ainsi $f' \in \mathcal{E}_{n,\lambda}$. Il est clair que D est $\mathbb{R}$-linéaire car la dérivation des fonctions est linéaire :

$$(f + \mu g)' = f' + \mu g'.$$

Montrons que D est injective.

$$\mathrm{Ker}(D) = \{f \in \mathcal{E}_{n,\lambda}\ f' = 0\}.$$

Comme $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$, on a $f'(x) = p'(x) + \lambda p(x))e^{\lambda x} = 0$ si et seulement si $p(x) = -\dfrac{1}{\lambda}p'(x)$. ce qui n'est possible que si $p = 0$ car sinon $\deg(p') < \deg(p)$. Donc $\mathrm{Ker}D = 0$ et D est injective. D'autre part $\mathcal{E}_{n,\lambda}$ est de dimension finie car il est engendré par les fonctions $x \mapsto x^k e^{\lambda x}$, $0 \leq k \leq n$ qui forment une base. On a donc $\dim(\mathcal{E}_{n,\lambda}) = n + 1$. Puisque D injective , le théorème du rang nous donne que $\dim(\mathrm{Im}(D)) = n+1$ c'est-à-dire que D est surjective. On a donc D bijective. $\square$

Corollaire 12. *Toute fonction de la forme $p(x)e^{\lambda x}$ admet une unique primitive de la même forme.*

On s'intéresse maintenant à la variante trigonométrique.
Soit $w \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$T_{n,w} = \{p(x)\cos(wx) + q(x)\sin(wx);\ p, q \text{des fonctions polynomiales de degré au plus } n\}.$$

Proposition 30. *$T_{n,w}$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$ de dimension $2n+2$, stable par dérivation et l'application*

$$\begin{aligned} D : T_{n,w} &\to T_{n,w} \\ f &\mapsto f', \end{aligned}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire bijective.

Démonstration. Il est rapide de montrer que $T_{n,w}$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions

$$x \mapsto x^k\cos(wx),\ 0 \leq k \leq n, \quad x \mapsto x^k \sin(wx),\ 0 \leq k \leq n.$$

C'est une famille à $2n+2$ éléments. Pour montrer que c'est une base, il faut montrer qu'elle est libre. C'est un exercice vu en TD (au moins en partie). Par la suite, on considèrera qu'il s'agit bien d'une base et donc que $\dim(T_{n,w}) = 2n+2$.
Soit $f \in T_{n,w}$. f et f' s'écrivent

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x)\cos(wx) + q(x)\sin(wx), \\ f'(x) &= p'(x)\cos(wx) - wp(x)\sin(wx) + q'(x)\sin(wx) + wq(x)\cos(x) \\ &= (p'(x) + wq(x))\cos(wx) + (q'(x) - wp(x))\sin(wx). \end{aligned}$$

Ainsi $f' \in T_{n,w}$. L'application $D : T_{n,w} \to T_{n,w}$ est linéaire.
Si $f \in \mathrm{Ker}(D)$ alors $f' = 0$ ce qui équivaut à

$$(p'(x) + wq(x))\cos(wx) + (q'(x) - wp(x))\sin(wx) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ce qui donne

$$\begin{cases} p'(x) + wq(x) = 0 \\ q'(x) - wp(x) = 0. \end{cases}$$

Soit encore $q(x) = -\frac{1}{w}p'(x)$ et $p(x) = \frac{1}{w}q'(x)$. Si $p \neq 0$, on obtient $p(x) = \frac{1}{w}q'(x) = -\frac{1}{w^2}p"(x)$, ce qui est impossible car le degré de $p"$ est strictement inférieur à celui de p, idem pour q. Donc nécessairement $p = q = 0 = f$ donc $\mathrm{Ker}(D) = 0$. Comme précédemment, on en déduit que D est injective, puis surjective (théorème du rang) et donc bijective. □

On finit par les primitives de fonctions rationnelles.
Une fonction rationnelle est une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

où p et q sont des fonctions polynomiales et $q(x) \neq 0$ pour tout x.
Si f est un polynôme de degré n, f admet une primitive de degré $n+1$. Mais si $f(x) = 1/x$, la primitive est $\ln(x) + c$, ce n'est pas une fraction rationnelle.

Il y a une méthode générale. On se ramène à une fraction rationnelle réduite, de la forme $\frac{p(x)}{q(x)}$, avec $\deg(p) < \deg(q)$. Par exemple $1/x$, $1/(x-1)(x-2)$...
Soit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, avec p, q deux fonctions polynomiales, $q \neq 0$. La division euclidienne de p par q revient à écrire

$$p = aq + r,$$

où a et r sont des fonctions polynomiales, telles que $\deg(r) < \deg(q)$.
De manière générale, on a

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

où $a(x)$ est une fonction polynomiale et $\frac{r(x)}{q(x)}$ une fraction réduite.
Pour trouver une primitive d'une fraction p/q, il suffit de trouver une primitive de la fraction réduite r/q.

Éléments simples Ce sont les fractions réduites de la forme suivante

1. $\frac{1}{(x-a)^n}, \quad n \geq 1,$
2. $\frac{bx+c}{((x-a)^2+1)^n}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(b, c) \neq (0, 0)$ et $n \geq 1$.

Théorème 23. *(Admis) Toute fonction rationnelle réduite s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments simples.*

Il suffit alors de savoir calculer des primitives des éléments simples.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}}, & \text{si } n \neq 1, \\ \ln|x-a|, & \text{si } n = 1. \end{cases},$

2. $\displaystyle\int \frac{bx+c}{((x-a)^2+1)^n}\mathrm{d}x$?

Comment écrire une fraction réduite comme combinaison linéaire d'éléments simples ?
En général, on peut supposer que p et q sont premiers entre eux, quitte à simplifier la fraction. Alors les racines de q ne sont pas des racines de p. Pour $q(x) = a(x-\lambda_1)^{m_1}...(x-\lambda_r)^{m_r}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les racines de q dans $\mathbb{C}$ et $m_1, \ldots, m_r$ les multiplicités de ces racines. p/q s'écrit comme combinaison linéaire des éléments simples $\dfrac{1}{(x-\lambda_i)^k}$, $1 \leq k \leq m_i$.
Si les racines sont toutes réelles, on a donc une décomposition en éléments simples du premier type.

Linéarisation

Proposition 31. *La fonction* $\cos^n(x)\sin^p(x)$ *,* $n, p \in \mathbb{R}$ *s'écrit comme combinaison linéaire des fonctions*

$$\begin{cases} \cos(kx), & \textit{si } p \textit{ est pair}, \\ \sin(kx), & \textit{si } p \textit{ est impair}. \end{cases}$$

On utilise cette propriété pour intégrer $\displaystyle\int \cos^n(x)\sin^p(x)\mathrm{d}x$. On utilise la formule de Moivre

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \cos^n(x)\sin^p(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^p \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}. \end{aligned}$$

2.2.4 Sommes de Riemann

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $(a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. On appelle h le pas d'espace

$$h = \max_{0\leq k\leq n-1}(a_{k+1}-a_k).$$

Définition 30. *On appelle somme de Riemann de f le réel*

$$\Sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)f(x_k),$$

où $x_k \in [a_k, a_{k+1}]$*. On a* $\Sigma(f) = \int_a^b c(x)\mathrm{d}x$*, où c est la fonction en escalier*

$$c(x) = \begin{cases} f(x_k), & \textit{si } x \in [a_k, a_{k+1}], \\ f(b), & \textit{si } x = b. \end{cases}$$

Théorème 24. *Si f est Riemann-intégrable, $\Sigma(f)$ tend vers $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ lorsque $h \to 0$. Plus précisément pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que si la subdivision est telle que $h < \eta$, alors*

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \Sigma(f) \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. C'est une conséquence de la définition. □

Corollaire 13. *Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors telle que $h < \eta$, alors*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b-a)).$$