2 Analyse

2.1 Dérivée d'une fonction

2.1.1 Dérivée

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 23. *f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. Ce nombre s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Définition 24. *f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la dérivée de f, notée f' ou $\dfrac{df}{dx}$.*

Remarque 14. *La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. À la limite on trouve que la pente de la tangente est $f'(x_0)$. L'équation de la tangente est donc*

$$y = (x-x_0)f'(x_0) + f(x_0).$$

Proposition 21.
- *f est dérivable en x_0 si et seulement si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

  existe et est finie.
- *f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\varepsilon : I \to R$ telle que $\varepsilon(x) \to 0$ pour $x \to x_0$, avec*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)l + (x-x_0)\varepsilon(x).$$

Démonstration. Il s'agit simplement d'une reformulation de la définition. □

Proposition 22. *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*
- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Démonstration. On ne démontre que le premier résultat puisque le second en découle. Supposons f dérivable en x_0 et montrons la continuité en ce point. On utilise la deuxième formulation :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)l + (x-x_0)\varepsilon(x).$$

Comme $x \to x_0$, les 2 derniers termes tendent vers 0 et on a $f(x) \to f(x_0)$. Ainsi f est continue en x_0. □

Attention ! ! La réciproque est fausse, penser à la valeur absolue.

2.1.2 Calcul des dérivées

Proposition 23. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$*
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, *pour λ un réel*
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$, *si $f(x) \neq 0$*
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, *si $g(x) \neq 0$*

Les démonstrations sont réalisées en revenant à l'écriture des taux d'accroissement.
Sur Moodle, est à disposition un petit tableau des dérivées usuelles et des compositions usuelles.

Proposition 24. *Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x et*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Corollaire 7. *Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective d'inverse f^{-1}. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Remarque 15. *Pour se souvenir de la formule, mieux vaut dériver $f(g(x)) = x$ où $g = f^{-1}$.*

2.1.3 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde. Plus généralement, on note

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad , f^{(2)} = f'', \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Théorème 13. *(Formule de Leibniz)*

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g^{(1)} + \ldots + \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)} + \ldots + fg^{(n)}.$$

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme de Newton.

Exemple 7. *Pour $n = 2$, on a $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.*

2.1.4 Extremum local et théorème de Rolle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 25. *(Point critique)*
- *On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.*
- *On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp. un minimum local) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que*

$$\textit{pour tout } x \in I \cap J, \quad f(x) \leq f(x_0),$$

  (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

— *On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum ou un minimum local en ce point.*

On parlera de maximum global (resp. minimum) en x_0 si pour toutes autres valeurs $f(x)$, $x \in I$, on a $f(x) \leq f(x_0)$ (on regarde au-delà de l'ouvert J). Un maximum global est un maximum local mais la réciproque est fausse.

Théorème 14. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Supposons que x_0 soit un maximum local de f, soit donc J l'intervalle ouvert de la définition contenant x_0 tel que pour tout $x \in I \cap J$ on a $f(x) \leq f(x_0)$.

— Pour $x \in I \cap J$ tel que $x < x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 < 0$. Donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

En passant à la limite, on a $\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

— Pour $x \in I \cap J$ tel que $x > x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 > 0$. Donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

En passant à la limite, on a $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Or f est dérivable en x_0, donc on a égalité des limites à gauche et droite en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

La première limite est positive, la deuxième négative. La seule possibilité est que $f'(x_0) = 0$. ☐

Un maximum local (minimum) est toujours un point critique. Attention $f'(x_0) = 0$ n'implique pas que f admet un maximum ou un minimum en x_0.

Théorème 15. *(de Rolle)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

— *f continue sur $[a, b]$,*
— *f dérivable sur $]a, b[$,*
— *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique : il existe au moins un point où la tangente est horizontale.

Démonstration. Si f est constante sur $[a, b]$ alors n'importe quel $c \in]a, b[$ convient. Sinon, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple que $f(x_0) > f(a)$. Comme f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$, elle admet un maximum en un point $c \in [a, b]$. On a $f(c) \geq f(x_0) > f(a)$, donc $c \neq a$ par continuité de f. De même comme $f(a) = f(b)$, alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a, b[$. En c, f est dérivable et admet un maximum local donc $f'(c) = 0$. ☐

2.1.5 Théorème des accroissements finis

Théorème 16. *(des accroissements finis)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Graphiquement, cela signifie qu'il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) avec $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Démonstration. Posons $l = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - l(x-a)$. Alors $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(a)$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - l$. On a donc $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Le théorème permet d'étudier la croissance de fonction.

Corollaire 8. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

1. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ *est croissante ;*
2. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ *est décroissante ;*
3. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ *est constante*
4. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *est strictement croissante ;*
5. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ *est strictement décroissante.*

Les réciproques des deux dernières assertions sont fausses. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Démonstration. On démontre le premier point. Supposons la dérivée positive. Soient $x, y \in]a,b[$ avec $x \leq y$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. Mais $f'(x) \geq 0$ et $x - y \leq 0$. Donc $f(x) - f(y) \leq 0$. Cela implique que $f(x) \leq f(y)$. Comme c'est vrai pour tout x et y, f est croissante. Pour la réciproque, supposons f croissante. Soit $x \in]a,b[$. Pour tout $y > x$, $y - x > 0$ et $f(y) - f(x) \geq 0$. Ainsi le taux d'accroissement vérifie $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. A la limite $y \to x$, le taux d'accroissement tend vers la dérivée de f en x. Donc $f'(x) \geq 0$. □

Corollaire 9. *(Inégalité des accroissements finis) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, alors*

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

Démonstration. Fixons $x, y \in I$. Il existe alors $c \in]x,y[$ ou $c \in]y,x[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)$. Comme $|f'(c)| \leq M$, alors $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$. □

Corollaire 10. *(Règle de l'Hospital) Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que*

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$.

Si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ *alors* $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Démonstration. Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec $a < x_0$ (par exemple). Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$,
- h est dérivable sur $]a, x_0[$,
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Par le théorème de Rolle, il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$, donc $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$. Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$, cela conduit à $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$. Comme $a < c_a < x_0$ lorsque l'on fait tendre a vers x_0, on obtient $c_a \to x_0$. Cela implique

$$\lim_{a \to x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = l.$$

$\square$