2 Analyse

2.1 Dérivée d'une fonction

2.1.1 Dérivée

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 23. *f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. Ce nombre s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Définition 24. *f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la dérivée de f, notée f' ou $\dfrac{df}{dx}$.*

Remarque 14. *La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. À la limite on trouve que la pente de la tangente est $f'(x_0)$. L'équation de la tangente est donc*

$$y = (x-x_0)f'(x_0) + f(x_0).$$

Proposition 21.
- *f est dérivable en x_0 si et seulement si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

  existe et est finie.
- *f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\varepsilon : I \to R$ telle que $\varepsilon(x) \to 0$ pour $x \to x_0$, avec*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)l + (x-x_0)\varepsilon(x).$$

Proposition 22. *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*
- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Attention ! ! La réciproque est fausse, penser à la valeur absolue.

2.1.2 Calcul des dérivées

Proposition 23. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$*
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, *pour λ un réel*
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$, *si $f(x) \neq 0$*
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, *si $g(x) \neq 0$*

Les démonstrations sont réalisées en revenant à l'écriture des taux d'accroissement.
Sur Moodle, est à disposition un petit tableau des dérivées usuelles et des compositions usuelles.

Proposition 24. *Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x et*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Corollaire 7. *Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective d'inverse f^{-1}. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Remarque 15. *Pour se souvenir de la formule, mieux vaut dériver $f(g(x)) = x$ où $g = f^{-1}$.*

2.1.3 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde. Plus généralement, on note

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad , f^{(2)} = f'', \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Théorème 13. *(Formule de Leibniz)*

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g^{(1)} + \ldots + \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)} + \ldots + fg^{(n)}.$$

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme de Newton.

Exemple 7. *Pour $n = 2$, on a $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.*

2.1.4 Extremum local et théorème de Rolle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 25. *(Point critique)*

- *On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.*
- *On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp. un minimum local) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que*

$$\text{pour tout } x \in I \cap J, \quad f(x) \le f(x_0),$$

  (resp. $f(x) \ge f(x_0)$).
- *On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum ou un minimum local en ce point.*

On parlera de maximum global (resp. minimum) en x_0 si pour toutes autres valeurs $f(x)$, $x \in I$, on a $f(x) \le f(x_0)$ (on regarde au-delà de l'ouvert J). Un maximum global est un maximum local mais la réciproque est fausse.

Théorème 14. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Un maximum local (minimum) est toujours un point critique. Attention $f'(x_0) = 0$ n'implique pas que f admet un maximum ou un minimum en x_0.

Théorème 15. *(de Rolle)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

- f *continue sur* $[a, b]$,
- f *dérivable sur* $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique : il existe au moins un point où la tangente est horizontale.

2.1.5 Théorème des accroissements finis

Théorème 16. *(des accroissements finis)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *Il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Graphiquement, cela signifie qu'il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) avec $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Le théorème permet d'étudier la croissance de fonction.

Corollaire 8. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ *est croissante ;*
2. $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ *est décroissante ;*
3. $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ *est constante*
4. $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *est strictement croissante ;*
5. $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ *est strictement décroissante.*

Les réciproques des deux dernières assertions sont fausses. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Corollaire 9. *(Inégalité des accroissements finis) Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur un intervalle* I *ouvert. S'il existe une constante* M *telle que pour tout* $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, *alors*

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$