TD5 :

Exercice 1 :

1) (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$

$\Leftrightarrow$ (e_1, e_2, e_3) est libre (car on a 3 vecteurs)

$\Leftrightarrow$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont (e_1, e_2, e_3) a un noyau réduit au vecteur nul

$\Leftrightarrow$ son déterminant est non nul.

OR
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & i & 1 \\ i & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -i \\ 1 & \\ & 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & (i-1) & (1+i) \\ 0 & (1+i) & 0 \end{vmatrix} = -(1+i)^2$$
$$= -(1+2i-1) = -2i \neq 0.$$

DONC (e_1, e_2, e_3) forme bien une base de $\mathbb{C}^3$.

2) On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tq

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + i\gamma = 1+i \\ -\alpha + i\beta + \gamma = 1-i \\ i\alpha + \beta - \gamma = i \end{cases} \begin{matrix} 1 & -i \\ 1 & \\ & 1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + i\gamma = 1+i \\ (i-1)\beta + (i+1)\gamma = 2 \\ (i+1)\beta = i - i(1+i) = 1. \end{cases}$$

$$\beta = \frac{1}{1+i} = \boxed{\frac{1-i}{2}}$$

$$(1+i)\gamma = 2 + \frac{(1-i)^2}{2}$$
$$= 2 + \frac{1-2i-1}{2}$$
$$= 2 - i$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{(2-i)(1-i)}{2}$$
$$= \boxed{\frac{1-3i}{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1-i}{2} + \frac{3+i}{2} + 1 + i$$
$$= \frac{6+2i}{2} = \boxed{3+i}$$

<u>conclusion :</u> $x = \begin{pmatrix} 3+i \\ \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-3i}{2} \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}.$

<u>Exercice 2 :</u>

1) on cherche $a \in \mathbb{R}$ tq (e_1, e_2, e_3, e_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$ où

$e_1 = (1, a, 2, -1)$
$e_2 = (-2, 3, a, 1)$
$e_3 = (-1, 0, 2, 1)$
$e_4 = (2, -1, a, 1)$

ce qui revient à chercher $a \in \mathbb{R}$ tq $\det((e_1, e_2, e_3, e_4)) \neq 0$ (car on a 4 vecteurs dans un espace de dimension 4).

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ a & 3 & 0 & -1 \\ 2 & a & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ a & 3 & 0 & -1 \\ 2 & a & 2 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & a & 3 & -1 \\ 2 & 2 & a & a \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ \\ -2 \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & a & 3 & -1 \\ 0 & 4 & (a-2) & (a-2) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ a & 3 & -1 \\ 4 & (a-2) & (a-2) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & 3 & 8 \\ 4 & (a-2) & 4(a-2) \end{vmatrix}$$

$$3 \quad 1$$

$$= -\begin{vmatrix} a & 8 \\ 4 & 4(a-2) \end{vmatrix} = -4a^2 + 8a + 32.$$

$-4a^2 + 8a + 32 = 0 \iff a^2 - 2a - 8 = 0.$

$\Delta = 4 + 4 \times 8 = 36 = 6^2.$

$a_1 = \frac{2-6}{2} = -2 \qquad a_2 = \frac{2+6}{2} = 4.$

conclusion : $E = \mathbb{R}^4 \iff a \notin \{-2, 4\}$

2) Supposons que $a = -2$ alors par ce qui précède, on a $\dim(E) < 4$. Cherchons une base de E à l'aide du théorème de la base incomplète. On va chercher une famille libre maximale.

- $a = (1, -2, 2, -1)$
  $b = (-2, 3, -2, 1)$
  $c = (-1, 0, 2, 1)$
  $d = (2, -1, -2, 1)$

- $\{a\}$ est libre car $a \neq 0$.
- $\{a, d\}$ est libre car $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 & (1) \\ -2\alpha - \beta = 0 & (2) \\ 2\alpha - 2\beta = 0 & (3) \\ -\alpha + \beta = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (1)\ \alpha = -2\beta \\ (2)\ \beta = -2\alpha \end{array}$

  $\Rightarrow \alpha = \beta = 0.$

- $\{a, c, d\}$ est libre car $\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 & (1) \\ -2\alpha - \gamma = 0 & (2) \\ 2\alpha + 2\beta - 2\gamma = 0 & (3) \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 & (4) \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{ll} (2) & \gamma = -2\alpha. \\ (3) & \beta = -3\alpha. \\ (4) & -6\alpha = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

comme $\dim(E) < 4$ on voit que $\{a, c, d\}$ est maximal et donc, par le théorème de la base incomplète, c'est une base de E.

④

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = x \\ -2\alpha - \gamma = y \\ 2\alpha + 2\beta - 2\gamma = z \\ -\alpha + \beta + \gamma = t \end{cases} \begin{array}{l} 2 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \iff \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = x \\ -2\beta + 3\gamma = 2x + y \\ -4\beta + 6\gamma = 2x - z \\ 3\gamma = x + t \end{cases} \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x = \alpha - \beta + 2\gamma \\ 2x + y = -\beta + 3\gamma \\ x + t = 3\gamma \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

donc une équation linéaire caractérisant E est $\boxed{2x + 2y + z = 0}$

Exercice 3 :

- $\begin{vmatrix} 1 & 2i \\ (1-i) & 3 \end{vmatrix} = 1 - 2i$

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ i & -1 & -i \\ 1 & 2 & 1+i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & -(1+2i) & 0 \\ 1 & 0 & 2+i \end{vmatrix} = -(1+2i)(2+i) = -5i$

- $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11.$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ car}$$

$(-3,3,0) = 3(-1,1,0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3i & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 3e^{-\frac{4\pi}{3}} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 3 \times (-2) \times 1 \times (-1)$$

$= -6$ car matrice triangulaire

Exercice 4

$$\det\left(\begin{pmatrix} r & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & r & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} r & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & r & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (r-4) \times (1-2r) = r - 2r^2 - 4 + 8r = -2r^2 + 9r - 4.$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $(2,2,4) = 2\times(1,1,2)$, $(3,3,6) = 3\times(1,1,2)$

donc le déterminant de cette matrice est nul.

Exercice 5 :

- $$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b-c & a+b-c & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$-1 \qquad 1$

$-1 \qquad\qquad 1$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ d & c & b & a+x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ c & b & a+x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ d & b & a+x \end{vmatrix}$$

$$= x\left[x\left(x(a+x)+b\right)+c\right]+d$$

$$= x\left(x^3+ax^2+bx+c\right)+d = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

Exercice 6

1) • comme $\deg(p_i) = i-1$ et le coefficient dominant de p_i est 1, les p_i s'écrivent :

$$p_1 : x \longmapsto 1$$
$$p_2 : x \longmapsto x + a$$
$$p_3 : x \longmapsto x^2 + bx + c$$
$$p_4 : x \longmapsto x^3 + dx^2 + ex + f$$

• Si $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ alors par définition

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} c \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} f \\ e \\ d \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

• il vient que

$$\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{P}) = \begin{vmatrix} 1 & a & c & f \\ 0 & 1 & b & e \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

2) $\mathcal{P}$ est une famille de 4 vecteurs et $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{P}) \neq 0$ donc cette famille est libre, donc $\mathcal{P}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7 :

1) $$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3/2 & -3/2 \\ 3 & 3/2-\lambda & -3/2 \\ 3 & 3/2 & -3/2-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ -1 \quad -1 \\ 1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 3 & 3/2-\lambda & -3/2 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & \lambda \\ 3 & 3/2-\lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda^2(3-\lambda)$$

Ainsi $\chi(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{0, 3\}$.

2) $E_0 = \mathrm{Ker}(M_0)$, $E_1 = \mathrm{Ker}(M_3)$

comme $\det(M_0) = \det(M_3) = 0$, on conclu que ces deux matrices ne sont pas inversible et donc que leurs noyaux n'est pas réduit au vecteurs nul et qu'ils ne sont donc pas triviaux.

3) • Montrons que E_0 et E_1 sont en sommes directe. • On remarque que

$$M_3 = M_0 - 3 I_d \quad \text{où} \quad I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi si $u \in E_0 \cap E_1$ alors

• $u \in Ker(M_0) \Rightarrow M_0 u = 0$

• $u \in Ker(M_3) \Rightarrow M_3 u = 0 \Rightarrow M_0 u - 3u = 0$
$\Rightarrow M_0 u = 3u$

et donc $3u = M_0 u = 0 \Rightarrow u = 0$

donc $E_0 \cap E_1 = \{0\}$

• Montrons que $dim(E_0) + dim(E_1) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

On remarque que

$$\begin{pmatrix} 3 & 3/2 & -3/2 \\ 3 & 3/2 & -3/2 \\ 3 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 3/2 & -3/2 \\ 3 & 3/2 & -3/2 \\ 3 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et que $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre, par le théorème de la base incomplète, on a $dim(E_0) \geq 2$. Or $dim(E_1) \geq 1$ et comme $E_0 \cap E_1 = \{0\}$ on a $dim(E_0) + dim(E_1) \leq dim(\mathbb{R}^3) = 3$

- On conclut que $\dim(E_0) = 2$, $\dim(E_1) = 1$, (11)

et donc que $E_0 \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$.

Exercice 8 :

1) Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tq $u \in F \cap G$

alors $x + y = 0$ et $x = t$, $y = 2t$.

$\Rightarrow t + 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = y = 0$

donc $F \cap G = \{0\}$.

2) $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tq $u \in F \cap G$

$x - y + 2z = 0$ et $x = t$, $y = -t$, $z = t$

$\Rightarrow t + t + 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$

$\Rightarrow F \cap G = \{0\}$.

3) $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tq $u \in F \cap G$

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ et $x = t$, $y = -t$, $z = t$.

$\Rightarrow t - t + t = 0$ et $t - 2t = 0 \Rightarrow t = 0$

$\Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow F \cap G = \{0\}$

4) $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tq $u \in F \cap G$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & 1 \\ x + 2y = 0 & \\ x - y + z = 0 & -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x = y = z = 0$

$\Rightarrow \quad F \cap G = \{0\}$.

5) $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tq $u \in F \cap G$

$\Rightarrow \quad x = t_1, \; y = s_1, \; z = 0, \; t = 0$

$\Rightarrow \quad x = s_2, \; y = 0, \; z = 0, \; t = t_2$

$\Rightarrow \quad u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $F \cap G = \{ (x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R} \} \Rightarrow F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 9

$$\bullet\ a_n = \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}}_{n} = x \overbrace{\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}}^{n-1}$$

$$+(-1)^{n+1} y \underbrace{\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}}_{n-1}$$

Matrices triangulaires !

$$= \boxed{x^n - (-y)^n}$$

$$\bullet\ b_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+n} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} = b_{n-1}$$

$$= (-1)^{n+1} \times (-1)^n + b_{n-1}$$

$$= b_{n-1} - 1$$

Et $b_1 = |1| = 1$

ccl : $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{b_n = 2 - n}$

• $C_n = \begin{vmatrix} r & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \end{vmatrix}$

On pose $\lambda = 1 - r$

$C_n = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$

$-1 \quad 1$

$-1 \quad 1$

$-1 \quad 1$

$-1 \quad 1$

$= (-\lambda)^{n-1} \lambda \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} - \lambda C_{n-1}$

(15)

OR $\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \times (-\lambda)^{n-2} = \lambda^{n-2}$.

DONC $\quad C_{n+1} = (-\lambda)^n - \lambda C_n$

et $C_1 = 1 - \lambda$

il vient que si $\lambda = 0$, $C_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $C_n = 0$.

si $\lambda \neq 0$ alors en posant $x_n = \dfrac{C_n}{(-\lambda)^{n-1}}$

$$x_{n+1} = \frac{(-\lambda)^n - \lambda C_n}{(-\lambda)^n} = 1 + \frac{C_n}{(-\lambda)^{n-1}} = 1 + x_n.$$

et $x_1 = 1 - \lambda$. donc $x_n = 1 - \lambda + (n-1) = n - \lambda$.

Ainsi, si $\lambda \neq 0$, on a $C_n = (-\lambda)^{n-1}(n - \lambda)$

si $\lambda = 0$, on a $C_n = 0$

donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $C_n = (-\lambda)^{n-1}(n - \lambda)$

$$\Rightarrow \boxed{C_n = (\lambda - 1)^{n-1}\left(\lambda + (n-1)\right)}$$

Exercice 10

voir $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2\left(1 - 9 + 6 - 6 \right) = -16 \neq 0$$

donc la matrice est inversible, cherchons

A^{-1} tq $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2y + 2z = x' \\ x - z - 3t = y' \\ 3x - z - 3t = z' \\ x + y - z - 4t = t' \end{array} \right. \begin{array}{l} 1 \\ \\ \\ 2 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2y + 2z = x' \\ -z - 3t + x = y' \\ -z - 3t + 3x = z' \\ -8t + 2x = x' + 2t' \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ -1 \\ 1 \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2y + 2z = x' \\ -z - 3t + x = y' \\ -8t + 2x = x' + 2t' \\ 2x = -y' + z' \end{array} \right.$$

• $x = -\frac{1}{2} y' + \frac{1}{2} z'$

• $-8t - y' + z' = x' + 2t' \iff -8t = x' + y' - z' + 2t'$

$\iff t = -\frac{1}{8} x' - \frac{1}{8} y' + \frac{1}{8} z' - \frac{1}{4} t'$

• $-z + \frac{3}{8} x' + \frac{3}{8} y' - \frac{3}{8} z' + \frac{3}{4} t' - \frac{1}{2} y' + \frac{1}{2} z' = y'$

$$z = \frac{3}{8} x' + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} - 1\right) y' + \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right) z' + \frac{3}{4} t'$$
$$= \frac{3}{8} x' - \frac{9}{8} y' + \frac{1}{8} z' + \frac{3}{4} t'$$

• $-y + z = \frac{x'}{2} \iff y = \left(-\frac{1}{8}\right) x' - \frac{9}{8} y' + \frac{1}{8} z' + \frac{3}{4} t'$

$$\iff A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1/8 & -9/8 & 1/8 & 3/4 \\ 3/8 & -9/8 & 1/8 & 3/4 \\ -1/8 & -1/8 & 1/8 & -1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -1 & -9 & 1 & 3 \\ 3 & -9 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$