

---

## TD 5 : Sous-espaces vectoriels et déterminants

---

---

### Décomposition de $\mathbb{R}^n$

---

#### Exercice 1 :

1. Montrer que la famille suivante est une base de  $\mathbb{C}^3$

$$\mathbf{e}_1 = (1, -1, i), \quad \mathbf{e}_2 = (-1, i, 1), \quad \mathbf{e}_3 = (i, 1, -1).$$

2. Calculer les coordonnées du vecteur  $\mathbf{x} = (1 + i, 1 - i, i)$  dans cette base.

#### Exercice 2 :

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par

$$(1, a, 2, -1), \quad (-2, 3, a, 1), \quad (-1, 0, 2, 1), \quad (2, -1, a, 1).$$

1. Pour quelles valeurs de  $a$  a-t-on égalité  $E = \mathbb{R}^4$  ?  
2. On suppose que  $a = -2$ . Déterminer une base de  $E$  et trouver une équation linéaire qui caractérise les coordonnées (dans la base canonique) des éléments de  $E$  parmi les vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ .

---

### Calculs de déterminants

---

#### Exercice 3 :

Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2i \\ (1-i) & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ i & -1 & -i \\ 1 & 2 & (1+i) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3i & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 3e^{-\pi/3} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 4 :**

Calculer les déterminants des matrices suivantes, éventuellement en fonction des paramètres recensés.

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5 :**

Calculer les déterminants suivants, éventuellement en fonction des paramètres recensés.

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ d & c & b & a+x \end{vmatrix}, \quad (a, b, c, d, x) \in \mathbb{R}^5, \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

---

**Déterminants - théorie**

---

**Exercice 6 :**

On considère l'ensemble  $\mathcal{P}_3$  des fonctions polynomiales de degré au plus 3 muni de sa base canonique  $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ . Soit  $Q = (p_i)_{i=1,2,3,4}$  la famille de fonctions polynomiales, telle que  $\deg(p_i) = i - 1$  et le coefficient dominant de  $p_i$  est 1.

1. Calculer  $\det_{\mathcal{E}}(Q)$ .
2. En déduire que  $Q$  est une base de  $\mathcal{P}_3$ .

**Exercice 7 :**

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on note

$$M_{\lambda} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{3}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} - \lambda \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $\chi(\lambda) = \det(M_{\lambda})$  s'annule pour exactement deux valeurs  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  que l'on précisera.
2. En déduire que  $E_0 = \text{Ker}(M_{\lambda_0})$  et  $E_1 = \text{Ker}(M_{\lambda_1})$  ne sont pas triviaux.
3. Montrer que  $E_0 \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$ .