TD 5 : Sous-espaces vectoriels et déterminants

Décomposition de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 :

1. Montrer que la famille suivante est une base de $\mathbb{C}^3$

$$\mathbf{e}_1 = (1, -1, i), \quad \mathbf{e}_2 = (-1, i, 1), \quad \mathbf{e}_3 = (i, 1, -1).$$

2. Calculer les coordonnées du vecteur $\mathbf{x} = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

Exercice 2 :
Soient $a \in \mathbb{R}$ et E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$(1, a, 2, -1), \quad (-2, 3, a, 1), \quad (-1, 0, 2, 1), \quad (2, -1, a, 1).$$

1. Pour quelles valeurs de a a-ton égalité $E = \mathbb{R}^4$?
2. On suppose que $a = -2$. Déterminer une base de E et trouver une équation linéaire qui caractérise les coordonnées (dans la base canonique) des éléments de E parmi les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Calculs de déterminants

Exercice 3 :
Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2i \\ (1-i) & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ i & -1 & -i \\ 1 & 2 & (1+i) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3i & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 3e^{-\pi/3} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4 :
Calculer les déterminants des matrices suivantes, éventuellement en fonction des paramètres recensés.

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :
Calculer les déterminants suivants, éventuellement en fonction des paramètres recensés.

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \qquad \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ d & c & b & a+x \end{vmatrix}, \quad (a,b,c,d,x) \in \mathbb{R}^5.$$

Déterminants - théorie

Exercice 6 :
On considère $\mathbb{R}_3[x]$ muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$. Soit $\mathcal{P} = (p_i)_{i=1,2,3,4}$ telle que $\deg(p_i) = i - 1$ et le coefficient dominant de p_i est 1.

1. Calculer $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{P})$.
2. En déduire que $\mathcal{P}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercice 7 :
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 3-\lambda & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & \frac{3}{2}-\lambda & -\frac{3}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}-\lambda \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\chi(\lambda) = \det(M_\lambda)$ s'annule pour exactement deux valeurs λ_0 et λ_1 que l'on précisera.
2. En déduire que $E_0 = \mathrm{Ker}(M_{\lambda_0})$ et $E_1 = \mathrm{Ker}(M_{\lambda_1})$ ne sont pas triviaux.
3. Montrer que $E_0 \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$.