
TD 4 : Matrices d'applications linéaires, changement de base

Matrices d'applications linéaires

Exercice 1 :

Écrire les matrices des applications suivantes dans les bases canoniques.

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 & \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2 \\ (x, y, z) \mapsto (x - y, 2x + z, x + 3y - z), & z \mapsto \exp(i\alpha)z, \alpha \in \mathbb{R} & p \mapsto p(x - 2), \end{array}$$

$$\mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \int_0^1 p(x)dx.$$

Note : l'ensemble \mathcal{P}_2 désigne l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de degré au plus 2.

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, exprimer l'application φ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
2. $\varphi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$,
3. $\varphi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Note : l'ensemble \mathcal{P}_2 désigne l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de degré au plus 2.

Changement de base

Exercice 3 :

Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 7 & 25 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver un vecteur non nul \mathbf{e} puis un vecteur $\tilde{\mathbf{e}}$ tels que

$$\varphi(\mathbf{e}) = 2\mathbf{e}, \quad \varphi(\tilde{\mathbf{e}}) = 2\tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{e}.$$

2. Montrer que $\mathcal{E} = (\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}})$ est une base de \mathbb{R}^2 puis calculer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 4 :

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On note \mathcal{E} la famille contenant les trois vecteurs

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3.$$

Montrer que \mathcal{E} est une base puis exprimer la matrice φ dans la base \mathcal{E} .

Exercice 5 :

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

$$\varphi(x, y, z) = (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que $\varphi \circ \varphi = 2\varphi$. En déduire que, pour tout $\mathbf{e} \in \text{Im}(\varphi)$, on a $\varphi(\mathbf{e}) = 2\mathbf{e}$.
3. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
4. Construire une base de \mathbb{R}^3 en utilisant les bases de $\text{Ker}\varphi$ et de $\text{Im}\varphi$. Écrire la matrice de φ dans cette base.
5. Trouver une équation linéaire caractérisant les composantes des éléments de $\text{Im}(\varphi)$.

Exercice 6 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

1. Montrer que $\text{Ker}(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.
2. En utilisant que tout $x \in \mathbb{K}^n$ peut s'écrire $x = (x - \varphi(x)) + \varphi(x)$, montrer que $\text{Ker}(\varphi) + \text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}^n$.
3. En déduire qu'on peut construire une base \mathcal{E} de \mathbb{K}^n en concaténant une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$. On suppose que \mathcal{E} est une telle base par la suite.
4. Montrer que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in \text{Im}(\varphi)$.
5. En déduire la matrice de φ dans la base \mathcal{E} .

Pour aller plus loin

Exercice 7 :

Soit f une application linéaire sur \mathbb{R}^3 telle que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\dim(\text{ker}(f)) = 2$.
2. En déduire qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 :

Soit u l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et (f_1, f_2) celle de \mathbb{R}^2 . On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2,$$

et

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de \mathbb{R}^3 puis que (f'_1, f'_2) est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 9 :

Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.