Contrôle continu - 28 février 2024

Durée : 1 heure

Calculatrice, téléphone et documents interdits.
Les réponses doivent être soigneusement rédigées.
Le barème est indicatif.

Exercice 1 : Base de $\mathbb{C}^2$ (6 points)
Les familles suivantes sont-elles des bases du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$? Justifiez soigneusement votre réponse.

1. (3 points) $(1,1),(i,-i)$.
2. (3 points) $(1,i),(-i,1)$.

Proposition de correction :

1. La famille est libre car si $\alpha(1,1)+\beta(i,-i)=(0,0)$, alors
$$\begin{cases}\alpha+i\beta=0\\ \alpha-i\beta=0,\end{cases}$$
ce qui implique que $\alpha=0$ et par suite $\beta=0$. Soit $(x,y)\in\mathbb{C}^2$. On cherche α et β tel que $\alpha(1,1)+\beta(i,-i)=(x,y)$. On en déduit que
$$\begin{cases}\alpha+i\beta=x\\ \alpha-i\beta=y,\end{cases}$$
qui donne $\alpha=(x+y)/2$ et $\beta=(x-y)/2i$. Les coordonnées étant uniques, la famille est génératrice. C'est donc une base de $\mathbb{C}^2$. On aurait aussi pu raisonner sur le cardinal de la famille : elle contient 2 éléments et $\dim(\mathbb{C}^2)=2$, c'est donc une base de $\mathbb{C}^2$.
2. La famille n'est pas libre car $(1,i)=-i(-i,1)$. Ce n'est donc pas une base.

Exercice 2 : Application linéaire (4 points)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$ et $A\subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\varphi(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition de correction :
On montre que l'élément neutre de F est dans $\varphi(A)$. Comme A est un sev de E, $0_E \in A$. Puisque φ est linéaire, on a $\varphi(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in \varphi(A)$.
Montrons maintenant la stabilité par rapport à la somme et la multiplication. Soient $u, v \in \varphi(A)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On veut montrer que $\alpha u + v \in \varphi(A)$. Comme $u \in \varphi(A)$ (resp. $v \in \varphi(A)$), il existe $\bar{u} \in A$ (resp. $\bar{v} \in A$) tel que $\varphi(\bar{u}) = u$ (resp. $\varphi(\bar{v}) = v$). On a donc $\alpha u + v = \alpha\varphi(\bar{u}) + \varphi(\bar{v}) = \varphi(\alpha\bar{u} + \bar{v})$ par linéarité de φ. Comme $\alpha\bar{u} + \bar{v} \in A$ (puisque A est un sev), on en déduit que $\alpha u + v \in \varphi(A)$.

Exercice 3 : Espaces supplémentaires (10 points)
Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'espace E est engendré par les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 2)$ et $\mathbf{u}_2 = (-2, 1, 4)$ c'est-à-dire $E = \text{vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. L'espace F est défini par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } -x + y + z = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. (4 points) Montrer que F est de dimension 1 et déterminer un vecteur $\mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $F = \text{vect}(\mathbf{u}_3)$.
2. (3 points) Montrer que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. (3 points) Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Proposition de correction :

1. On a
$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$
qui donne $x = -z$ et $y = -2z$. On en déduit que
$$F = \{z \in \mathbb{R}, (-z, -2z, z)\} = \text{vect}((-1, -2, 1)).$$
Une base de F est donc $(-1, -2, 1)$ et la dimension de F est 1.
2. La famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est maximale dans $\mathbb{R}^3$. Pour montrer que c'est une base, on montre que c'est une famille libre. Considérons la combinaison linéaire nulle suivante
$$\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 + \gamma\mathbf{u}_3 = 0_{\mathbb{R}^3},$$
et montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Cela revient à montrer que (α, β, γ) est dans le noyau de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$. On a
$$\begin{cases} -\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$
qui devient (en additionnant à la dernière équation deux fois la première)
$$\begin{cases} -\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ -\gamma = 0. \end{cases}$$
Il en découle que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est donc libre. Elle est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Comme la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est libre, $\mathbf{u}_3$ n'est pas combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$. Il s'en suit que $\mathrm{vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \cap \mathrm{vect}(\mathbf{u}_3) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ c'est-à-dire que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. De plus, $\dim(E) = 2$ et $\dim(F) = 1$. On en déduit $\dim(E+F) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Comme $E+F \subset \mathbb{R}^3$, on a $E + F = \mathbb{R}^3$ et donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.