1.5 Éléments propres et diagonalisation

Ce paragraphe peut être vu comme une introduction à la diagonalisation. Le calcul d'éléments propres est important, notamment en physique et mécanique.
Par la suite $\mathbb{K}$ est un corps. Les matrices sont toutes carrées, éléments de $M_n(\mathbb{K})$.

1.5.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Exemple 5. *Soit* $h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$.
L'application h est une homothétie de $\mathbb{R}^2$ centrée à l'origine. Si une droite D passe par l'origine, alors est elle invariante par h au sens où si P est un point de D alors $h(P)$ est sur D mais on n'a pas $h(P) = P$.

Pour une matrice quelconque, il s'agit de voir comment on se ramène à des situations géométriques simples..

Définition 21. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.*
- *λ est dite valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ tel que*

$$AX = \lambda X.$$

- *Le vecteur X est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Exemple 6. *(Cas d'une matrice diagonale) Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors les scalaires $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sont les valeurs propres de A associées respectivement aux vecteurs propres

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.5.2 Les vecteurs propres forment une famille libre

Théorème 12. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de A et soit X_i un vecteur propre associé à λ_i (pour $1 \leq i \leq r$). Alors les vecteurs $X_1, \dots, X_r$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Par récurrence sur r (le nombre de valeurs propres).
Initialisation. Pour $r = 1$ la famille (X_1) est libre car X_1 est non nul.
Hérédité. On suppose que $(X_1, \dots, X_{r-1})$ forme une famille libre pour $r \geq 2$ fixé. Soit λ_r une autre valeur propre et soit X_r le vecteur propre associé.
Soient $a_1, \dots a_r$ des scalaires tels que

$$a_1 X_1 + \dots + a_r X_r = 0. \qquad (*)$$

Alors

$$A(a_1X_1 + \ldots + a_rX_r) = 0,$$

donc

$$a_1AX_1 + \ldots + a_rAX_r = 0.$$

On utilise que les X_i sont des vecteurs propres :

$$a_1\lambda_1X_1 + \ldots + a_r\lambda_rX_r = 0. \qquad (**)$$

On calcule maintenant $(**) - \lambda_r(*)$:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_r)\lambda_1X_1 + \ldots + a_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)X_{r-1} = 0.$$

Comme $(X_1, \ldots, X_{r-1})$ est une famille libre (par hypothèse de récurrence), les coefficients sont nuls, mais comme les valeurs propres sont distinctes, on a nécessairement $a_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, r-1$. En utilisant à nouveau $(*)$, on en déduit que a_r est aussi nul. □

1.5.3 Polynôme caractéristique

Comment trouver les valeurs propres d'une matrice ?

Proposition 19. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

$$\lambda \textit{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de A } &\Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad AX = \lambda X \\ &\Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad (A - \lambda I_n)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ n'est pas injective} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0. \end{aligned}$$

□

On appelle $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$ le polynôme caractéristique de A. La proposition devient alors

$$\lambda \text{ est une valeur propre de A} \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0.$$

La matrice A étant de taille $n \times n$, alors son polynôme caractéristique est de degré au plus n.

Corollaire 6. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

- *Alors A admet au plus n valeurs propres (un polynôme de degré n admet au plus n racines).*
- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre. (Sur $\mathbb{C}$ le polynôme non constant admet toujours au moins une racine).*

1.5.4 Matrice diagonalisable

Définition 22. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.*

Proposition 20. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Supposons que A admette n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des vecteurs propres associés. Alors*

- *La matrice A est diagonalisable*
- *Si on note P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $X_1, \dots, X_n$, alors $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale formée des valeurs propres de A.*

Démonstration.

- La famille $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille libre car les valeurs propres sont distinctes.
- La matrice P est inversible car ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$. On pose $D = P^{-1}AP$.
- Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. On a $Pe_i = X_i$ et $e_i = P^{-1}X_i$.
  Calculons De_i :
  $$\begin{aligned} De_i &= (P^{-1}AP)e_i = (P^{-1}A)Pe_i \\ &= P^{-1}AX_i \\ &= P^{-1}\lambda_i X_i \\ &= \lambda_i P^{-1} X_i \\ &= \lambda_i e_i. \end{aligned}$$
  On a donc montrer que la i-ème colonne de D est $\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$.

□

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Quelle est la méthode à appliquer pour essayer de diagonaliser A ?

1. On calcule d'abord son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$.
2. On cherche les racines de $\chi_A(X)$: ce sont les valeurs propres de A.
   On suppose ici que l'on a trouvé n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
3. Pour chaque valeur propre λ_i de A on cherche un vecteur propre associé X_i.
4. Soit P la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $X_1, \dots, X_n$. Alors $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale formée des valeurs propres de A.