1.4 Déterminants

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Qu'est-ce qu'une base de E ? C'est la donnée de n vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$. Mais comment décider si n vecteurs forment une base ? On aimerait trouver un critère rapide pour déterminer si une famille est une base ou non.
Ce critère, c'est un scalaire, associé à la famille des n vecteurs qui distingue les bases des non-bases. On l'appelle le déterminant.

Théorème 5. *(Existence et unicité du déterminant)*
Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que

1. *le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixées (on parle de forme multilinéaire),*
2. *Si une matrice A a deux colonnes identiques, son déterminant est nul (on dit que l'application est alternée).*
3. *le déterminant de la matrice identité I_n est 1.*

On admettra la (longue) démonstration de ce théorème.
Pour une matrice $A = (a_{ij})$, on note

$$\det(A) \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si on note C_i la i-ème colonne de A, la linéarité du déterminant se traduit comme suit : pour $a, b \in \mathbb{K}$

$$\det(C_1, \dots, aC_j + bC'_j, \dots, C_n) = a\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) + b\det(C_1, \dots, C'_j, \dots, C_n).$$

1.4.1 Déterminant et opérations sur les colonnes

Proposition 17. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$. On note A' la matrice obtenue par une des opérations suivantes sur les colonnes :*

1. *$C_i \leftarrow \lambda C_i$, avec $\lambda \neq 0$: A' est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors*
$$det(A') = \lambda det(A).$$
2. *$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$: A' est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne. Alors*
$$det(A') = det(A).$$
3. *$C_i \leftrightarrow C_j$: A' est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes. Alors*
$$det(A') = -det(A).$$

Démonstration. Tout repose sur la multilinéarité du déterminant. □

Proposition 18. *(Déterminant de matrices triangulaires)*
- *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses éléments diagonaux.*
- *Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

1.4.2 Quelques propriétés

Théorème 6.
$$det(AB) = det(A) \cdot det(B).$$

Corollaire 4. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus si A est inversible, alors*

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

Démonstration. Si A est inversible, il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = I_n$. Donc

$$\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A) = \det(I_n) = 1.$$

Si A n'est pas inversible, alors elle est de rang strictement inférieur à n. Il existe donc une relation de dépendance linéaire entre ses colonnes, c'est-à-dire qu'au moins l'une de ses colonnes est combinaison linéaire des autres. On en déduit que $\det(A) = 0$. □

Corollaire 5.
$$det(A^T) = det(A).$$

1.4.3 Calculs de déterminants

Une des techniques les plus utiles est le développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Définition 20. *(mineur et cofacteur) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.*
- *On note A_{ij} la matrice extraite, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.*
- *Le nombre $det(A_{ij})$ est un mineur d'ordre $n-1$ de la matrice A.*
- *Le nombre $D_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$ est le cofacteur de A relatif au coefficient a_{ij}.*

Remarque 11. *Pour déterminer si $D_{ij} = +det(A_{ij})$ ou $D_{ij} = -det(A_{ij})$, on associe des signes à la matrice A suivant un mode en échiquier. Sur l'exemple*

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

de sorte que $D_{11} = +det(A_{11})$ et $D_{12} = -det(A_{12})$...

Théorème 7. *(développement suivant une ligne ou une colonne)*
Formule de développement par rapport à la ligne i

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}.$$

Comme $det(A) = det(A^\top)$, on en déduit la formule de développement par rapport à la colonne j

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij}.$$

Théorème 8. *Soient A une matrice inversible et la matrice*

$$Com(A) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}$$

appelée la comatrice de A. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(Com(A))^\top.$$

1.4.4 Application du déterminant

On voit plusieurs applications. La première concerne la résolution d'un système linéaire.

Théorème 9. *(Méthode de Cramer)*
Soit

$$AX = b$$

un système à n équations et n inconnues. Supposons $det(A) \neq 0$. Alors l'unique solution X a pour composantes

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \dots, x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)},$$

où la matrice A_j est définie par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La démonstration est calculatoire et s'appuie sur le calcul de l'inverse de A. C'est une méthode de calcul à proscrire car trop coûteuse en terme de temps de calcul. On préfèrera le pivot de Gauss.

On utilise le calcul de déterminant pour déterminer si une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une base de E.

Théorème 10. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $v_1, \dots, v_n$ n vecteurs de E. Soit la matrice obtenue en juxtaposant les coordonnées des vecteurs par rapport à une base B de E. Les vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ forment une base de E si et seulement si $det(A) \neq 0$.*

Démonstration. On utilise le rang d'une famille de vecteurs.

$$\begin{aligned} (v_1, \dots, v_n) \text{ forme une base } &\Leftrightarrow \ \mathrm{rg}(v_1, \dots, v_n) = n \\ &\Leftrightarrow \ \mathrm{rg}(A) = n \\ &\Leftrightarrow A \text{ est inversible} \\ &\det(A) \neq 0. \end{aligned}$$

□

On rappelle que le rang d'une matrice est le nombre maximum de vecteur colonnes linéairement indépendants.

Théorème 11. *Le rang d'une matrice* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *est le plus grand entier* r *tel qu'il existe un mineur d'ordre* r *extrait de* A *non nul.*

Remarque 12. *A noter que pour déterminer le rang d'une application linéaire, on peut utiliser le calcul du déterminant pour déterminer le rang de sa matrice dans une base donnée.*

Remarque 13. *On a le résultat suivant :* $f \in End(E)$ *est un isomorphisme (endomorphisme inversible) si et seulement si*

$$det(Mat_B(\varphi^{-1})) = \frac{1}{det(Mat_B(\varphi))},$$

B *étant une base de* E.