1.4 Déterminants

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Qu'est-ce qu'une base de E ? C'est la donnée de n vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$. Mais comment décider si n vecteurs forment une base ? On aimerait trouver un critère rapide pour déterminer si une famille est une base ou non.
Ce critère, c'est un scalaire, associé à la famille des n vecteurs qui distingue les bases des non-bases. On l'appelle le déterminant.

Théorème 5. *(Existence et unicité du déterminant)*
Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que

1. *le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixées (on parle de forme multilinéaire),*
2. *Si une matrice A a deux colonnes identiques, son déterminant est nul (on dit que l'application est alternée).*
3. *le déterminant de la matrice identité I_n est 1.*

On admettra la (longue) démonstration de ce théorème.
Pour une matrice $A = (a_{ij})$, on note

$$\det(A) \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si on note C_i la i-ème colonne de A, la linéarité du déterminant se traduit comme suit : pour $a, b \in \mathbb{K}$

$$\det(C_1, \ldots, aC_j + bC'_j, \ldots, C_n) = a \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + b \det(C_1, \ldots, C'_j, \ldots, C_n).$$

1.4.1 Déterminant et opérations sur les colonnes

Proposition 17. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$. On note A' la matrice obtenue par une des opérations suivantes sur les colonnes :*

1. *$C_i \leftarrow \lambda C_i$, avec $\lambda \neq 0$: A' est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors*
$$det(A') = \lambda det(A).$$
2. *$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$: A' est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne. Alors*
$$det(A') = det(A).$$
3. *$C_i \leftrightarrow C_j$: A' est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes. Alors*
$$det(A') = -det(A).$$

Proposition 18. *(Déterminant de matrices triangulaires)*
— *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses éléments diagonaux.*
— *Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

1.4.2 Quelques propriétés

Théorème 6.

$$det(AB) = det(A) \cdot det(B).$$

Corollaire 4. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus si A est inversible, alors*

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

Corollaire 5.

$$det(A^T) = det(A).$$

1.4.3 Calculs de déterminants

Une des techniques les plus utiles est le développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Définition 20. *(mineur et cofacteur) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.*
- *On note A_{ij} la matrice extraite, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.*
- *Le nombre $det(A_{ij})$ est un mineur d'ordre $n-1$ de la matrice A.*
- *Le nombre $D_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$ est le cofacteur de A relatif au coefficient a_{ij}.*

Remarque 11. *Pour déterminer si $D_{ij} = +det(A_{ij})$ ou $D_{ij} = -det(A_{ij})$, on associe des signes à la matrice A suivant un mode en échiquier. Sur l'exemple*

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

de sorte que $D_{11} = +det(A_{11})$ et $D_{12} = -det(A_{12})$...

Théorème 7. *(développement suivant une ligne ou une colonne)*
Formule de développement par rapport à la ligne i

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}.$$

Comme $det(A) = det(A^\top)$, on en déduit la formule de développement par rapport à la colonne j

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij}.$$

Théorème 8. *Soient A une matrice inversible et la matrice*

$$Com(A) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}$$

appelée la comatrice de A. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} (Com(A))^\top.$$

1.4.4 Application du déterminant

On voit plusieurs applications. La première concerne la résolution d'un système linéaire.

Théorème 9. *(Méthode de Cramer)*
Soit

$$AX = b$$

un système à n équations et n inconnues. Supposons $det(A) \neq 0$. Alors l'unique solution X a pour composantes

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \ldots, x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)},$$

où la matrice A_j est définie par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La démonstration est calculatoire et s'appuie sur le calcul de l'inverse de A. C'est une méthode de calcul à proscrire car trop coûteuse en terme de temps de calcul. On préfèrera le pivot de Gauss.

On utilise le calcul de déterminant pour déterminer si une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une base de E.

Théorème 10. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $v_1, \ldots, v_n$ n vecteurs de E. Soit la matrice obtenue en juxtaposant les coordonnées des vecteurs par rapport à une base B de E. Les vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forment une base de E si et seulement si $det(A) \neq 0$.*

On rappelle que le rang d'une matrice est le nombre maximum de vecteur colonnes linéairement indépendants.

Théorème 11. *Le rang d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur d'ordre r extrait de A non nul.*

Remarque 12. *A noter que pour déterminer le rang d'une application linéaire, on peut utiliser le calcul du déterminant pour déterminer le rang de sa matrice dans une base donnée.*

Remarque 13. *On a le résultat suivant : $f \in End(E)$ est un isomorphisme (endomorphisme inversible) si et seulement si*

$$det(Mat_B(\varphi^{-1})) = \frac{1}{det(Mat_B(\varphi))},$$

B étant une base de E.

1.5 Éléments propres et diagonalisation

Ce paragraphe peut être vu comme une introduction à la diagonalisation. Le calcul d'éléments propres est important, notamment en physique et mécanique.
Par la suite $\mathbb{K}$ est un corps. Les matrices sont toutes carrées, éléments de $M_n(\mathbb{K})$.

1.5.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Exemple 5. *Soit* $h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$.
L'application h est une homothétie de $\mathbb{R}^2$ centrée à l'origine. Si une droite D passe par l'origine, alors est elle invariante par h au sens où si P est un point de D alors $h(P)$ est sur D mais on n'a pas $h(P) = P$.

Pour une matrice quelconque, il s'agit de voir comment on se ramène à des situations géométriques simples..

Définition 21. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.*
— *λ est dite valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ tel que*

$$AX = \lambda X.$$

— *Le vecteur X est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Exemple 6. *(Cas d'une matrice diagonale) Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors les scalaires $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sont les valeurs propres de A associées respectivement aux vecteurs propres

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.5.2 Les vecteurs propres forment une famille libre

Théorème 12. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de A et soit X_i un vecteur propre associé à λ_i (pour $1 \leq i \leq r$). Alors les vecteurs $X_1, \dots, X_r$ sont linéairement indépendants.*

1.5.3 Polynôme caractéristique

Comment trouver les valeurs propres d'une matrice ?

Proposition 19. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors*

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow det(A - \lambda I_n) = 0.$$