Feuille d'exercices 2 :
Séries de fonctions

Exercice 1 Étudier la convergence sur $[0,1]$ des séries de fonctions $\sum f_n$ suivantes :

(a) $f_n(x) = x^\alpha(1-x)^n$, avec $n \geq 1$ et $\alpha > 0$.

(b) $f_n(x) = \ln(x)x^n(1-x)^\alpha$, avec $n \geq 1$ et $\alpha > 0$.

Exercice 2 Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, définie par $f_n(x) = x^n f(x)$.

(a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$ si et seulement si $f(1) = 0$.

(b) Supposons que $f(1) = 0$. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si f est dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.

Exercice 3 Montrer que les séries $\sum f_n$ suivantes admettent une convergence uniforme mais pas normale.

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n+1}$ si $x \in [n+1; n+2]$ et 0 sinon.

(b) $f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$, $\quad x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $n \geq 1$.

(c) $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

Exercice 4 Montrer que les séries $\sum g_n$ suivantes admettent une convergence uniforme sur tous les compacts.

(a) $g_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}$, $\quad x \in]0, +\infty[$, $n \geq 1$.

(b) $g_n(x) = \frac{1}{n+n^2x^2}$, $\quad x \in]0, +\infty[$, $n \geq 1$.

(c) $g_n(x) = (-1)^n \sin(\frac{1}{nx^2})$, $\quad x \in]0, +\infty[$, $n \geq 1$.

Dans les cas (a) et (b), montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$. Dans le cas (c), montrer qu'il n'y a pas convergence normale sur les compacts.

Exercice 5 Pour $n \geq 1$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$. Montrer que la série $\sum f_n$ est convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme f est continue. Montrer que f est dérivable sur $]0, 2\pi[$.

Exercice 6 Pour $n \geq 1$ soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{n(x+n)}$.

(a) Montrer que $\sum f_n$ est convergente sur $\mathbb{R}_+$. On appelle f sa somme.

(b) Montrer que la série des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(d) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(e) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 7 Pour $n \geq 1$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \ln(1 + \frac{x^2}{n^2})$.

(a) Montrer que la série $\sum f_n$ est convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme est continue. Soit f sa somme.

(b) Montrer que la série des dérivées converge normalement sur les compacts sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et paire.

(d) Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Exercice 8 Considérons la fonction **zêta de Riemann**

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x > 1.$$

(a) Montrer que ζ est C^∞.

(b) Montrer que ζ est décroissante et convexe.

(c) Soit

$$\zeta_1(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}, \quad x > 0.$$

Montrer que ζ_1 est bien définie et continue. Combien vaut $\zeta_1(1)$?

(d) Montrer la relation $\zeta_1(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

(e) En déduire que $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ au voisinage de 1^+.

Exercice 9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{3^n}\sin(3^n x)$.

(a) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note F sa somme.

(b) Montrer que F est continue et périodique.

(c) Trouver une relation entre $F(3x)$ et $F(x)$.

(d) En déduire que F n'est pas dérivable en 0.

Exercice 10 Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

(a) Déterminer le domaine de convergence D de $\sum f_n$.

(b) La convergence est-elle uniforme, normale sur D ?

(c) La somme est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 11 Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{x}\ln(n)}{1 + xn^2}.$$

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On appelle f sa somme. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$, mais qu'elle n'est pas continue en 0. *Indication : pour tout* $0 \leq k \leq n-1$ *montrer que* $f_{n+k}(1/n^2) \geq \ln(n)/5n$.

Exercice 12 On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, où $f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x)}$, $x \geq 0$.

(a) Étudier la convergence de cette série.

(b) Étudier la dérivabilité de sa somme S, notamment en 0 à droite (Indication : en 0 on pourra montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2x)}dt \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$, et effectuer une comparaison série/intégrale).

(c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ (qui par définition est $\zeta(3)$, cf exercice 8).

Exercice 13 On considère la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, où $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$.

(a) Montrer que (u_n) est une suite décroissante qui converge vers 0.

(b) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

(c) Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que

— $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = 1 - \tan(\frac{\alpha}{2})$,

— $0 \leq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\alpha} \cos^n(x)dx \leq \alpha$.

(d) En déduire une encadrement de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, puis que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1$.

Exercice 14 On considère la fonction $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}x}, x > 0$.

(a) Montrer que F est une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0, +\infty[$.

(b) Déterminer les limites de $F(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et $x \to +\infty$.

(b) Encadrer $F(x)$ au moyen de la fonction $G(x) = \sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)e^{-mx}$. En déduire un équivalent de $F(x)$ en 0^+.

(c) Montrer que $F(x) \sim e^{-x}$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 15 On considère la suite de fonction $S_n : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}.$$

(a) Montrer que la suite (S_n) converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera S. *Indication : regrouper les termes associés à k et $-k$.*

(b) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(c) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.

(d) Montrer que la fonction

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \longmapsto \pi\text{cotan}(\pi x) - S(x),$$

se prolonge en une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, impaire et 1-périodique.

(e) Montrer que G vérifie de plus

$$G(\tfrac{x}{2}) + G(\tfrac{x+1}{2}) = 2G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(f) En déduire que G est la fonction identiquement nulle. *Indication : on considérera un réel $a \in [0,1]$ satisfaisant $G(a) = \sup_{x\in[0,1]} G(x)$.*

(g) Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\alpha^2-1}$ pour tout entier $\alpha \geq 2$.