EXAMEN SESSION 1
"ALGÈBRE 1 - HAX708X"

11 JANVIER 2024

Questions isolées

a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'anneau quotient $\mathbb{Z}[i]/(n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$. Est-ce que 11 est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$?

On considère les idéaux $I = (n)$, $I' = (X^2+1)$ et $J = (n) + (X^2+1)$ de $\mathbb{Z}[X]$. On sait que le quotient $\mathbb{Z}[X]/J$ est isomorphe aux deux quotients suivants :

- $A/(J/I)$ avec $A = \mathbb{Z}[X]/I \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$ et $J/I \simeq (X^2+1) \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$,
- $B/(J/I')$ avec $B = \mathbb{Z}[X]/I' \simeq \mathbb{Z}[i]$ et $J/I' \simeq (n) \subset \mathbb{Z}[i]$.

On a ainsi montré que $\mathbb{Z}[i]/(n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$.

Comme $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau principal, l'élément 11 est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si le quotient $\mathbb{Z}[i]/(11) \simeq (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}[X])/(X^2+1)$ est un corps. Pour cela, il faut et il suffit que X^2+1 n'ait pas de racines dans le corps $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$: une petit calcul montre que c'est le cas. Conclusion : 11 est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

b. Soient $a, b \geq 1$: on note $a \wedge b$ leur pgcd. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z}$.

L'application $\phi : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z}, (x+(a), y+(b)) \mapsto xy + (a \wedge b)$, est $\mathbb{Z}$-bilinéaire. Elle se factorise donc en un morphisme de groupes $\bar{\phi} : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z}$.

Le morphisme de groupe $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}, x \mapsto x \otimes \overline{1}$ contient $a \wedge b\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ dans son noyau. Il se factorise donc en un morphisme $\bar{\psi} : \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$.

Un petit calcul permet de vérifier que $\bar{\phi} \circ \bar{\psi} = Id$ et $\bar{\psi} \circ \bar{\phi} = Id$.

c. À isomorphisme près, combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 400 ? En donner la liste.

Il y en a 10 :

$$\mathbb{Z}/400\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/200\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}, \quad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}, \quad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/50\mathbb{Z},$$

et

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/80\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/40\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, \quad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2.$$

d. Établir la table des caractères du groupe $G := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

G est un groupe abélien de cardinal 9, donc il possède (à isomorphisme près) 9 représentations irréductibles de dimension 1. Pour les déterminer, il faut décrire tous les morphismes de groupes $\psi : G \to \mathbb{C}^*$. Chaque racine troisième de l'unité $\xi \in \{1, j, j^2\}$ détermine le morphisme

$$\phi_\xi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*, k + (3) \mapsto \xi^k.$$

A chaque couple $(\xi, \xi') \in \{1, j, j^2\}^2$ on associe le morphisme $\psi_{\xi,\xi'} : G \to \mathbb{C}^*$ défini par la relation

$$\psi_{\xi,\xi'}(k + (3), \ell + (3)) = \xi^k (\xi')^\ell.$$

Conclusion : nous venons d'expliciter tous les morphismes de groupes $\psi : G \to \mathbb{C}^*$.

Exercice 1

On considère le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (pour l'addition).

(1) Déterminer la torsion du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Notons $[x]$ la classe de $x \in \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si $x = p/q$ alors $q[x] = [p] = [0]$. Donc tous les éléments de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont de torsion.

(2) Montrer que si p et q sont deux entiers premiers entre eux, le sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ engendré par la classe de $\frac{p}{q}$ est égal au sous-groupe engendré par la classe de $\frac{1}{q}$.

Posons $x = [\frac{p}{q}]$ et $x' = [\frac{1}{q}]$. Comme $x = px'$ le sous-groupe (x) engengré par x' contient le sous-groupe (x) engendré par x. Comme p et q sont premiers entre eux, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $ap + bq = 1$. Cela donne $x' = apx' + bqx' = ax$ et donc $(x') \subset (x)$. On a bien montré que $(x) = (x')$.

(3) En déduire que, pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un unique sous-groupe cyclique de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ d'ordre n.

Le sous-groupe engendré par $[\frac{1}{n}]$ est cyclique d'ordre n. Soit $x = [\frac{a}{b}] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ d'ordre n : on a $nx = [0]$, c'est à dire $n\frac{a}{b} = m \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Alors $x = [\frac{m}{n}]$ et $(x) = ([\frac{1}{n}])$ d'après la question précédente.

(4) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de type fini, i.e. engendré par un nombre fini d'éléments, est cyclique.

Soit $G \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ le sous-groupe engendré par $\frac{p_1}{q_1}, \cdots, \frac{p_\ell}{q_\ell}$:

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} n_i[\tfrac{p_i}{q_i}],\ (n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \right\}.$$

Posons $A_k = p_k \prod_{i \neq k} q_i$ et $A = pgcd(A_1, \ldots, A_\ell)$. Alors $\sum_{i=1}^{\ell} n_i[\frac{p_i}{q_i}] = [\frac{x}{Q}]$ avec $Q = \prod_i q_i$ et $x = \sum_{i=1}^{\ell} n_i A_i \in A\mathbb{Z}$. On voit donc que G est le sous-groupe engendré par $[\frac{A}{Q}]$. Conclusion : G est un groupe cyclique.

(5) Pour $n \geq 1$, combien y a-t-il de sous-groupes d'ordre n dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$?

La question précédente montre que tout sous-groupe fini de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est cyclique. Grâce à la question (3), on peut alors conclure qu'il existe un unique sous-groupe d'ordre n dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: celui engendré par $[\frac{1}{n}]$.

Exercice 2

Soit A un anneau principal et M un A-module de type fini. D'après le théorème de classification, il existe $m_1, \ldots, m_s \in M$ tels que $M = \oplus_{k=1}^{s} Am_k$ et $\mathrm{Ann}(m_1) \supset \cdots \supset \mathrm{Ann}(m_s)$.

(1) Soit $i \in \{1, \ldots, s\}$. Montrer qu'il existe $u_i \in \mathrm{End}_A(M)$ tel que $u_i(m_k) = \delta_{ks} m_i, \forall k \in \{1, \ldots, s\}$.

(2) Soit $u \in \mathrm{End}_A(M)$ qui commute avec tous les éléments de $\mathrm{End}_A(M)$. Montrer que u est la multiplication par un scalaire $a \in A$.

(3) Même question en supposant seulement que $u : M \to M$ est un morphisme de groupe additif qui commute avec tous les éléments de $\mathrm{End}_A(M)$.

(4) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. A chaque sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$, on associe son commutant

$$C(\mathcal{X}) = \{u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E); u \circ f = f \circ u, \forall f \in \mathcal{X}\}.$$

Montrer que pour tout $v \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ on a la relation $C(C(\{v\})) = \mathbb{K}[v]$.

Cet exercice est le numéro 32 du polycopié d'exercices. Il a été corrigé en TD.

Exercice 3

Soit $\mathfrak{A}_5 \subset \mathfrak{S}_5$ le groupe alterné. On note $V_1 = \mathbb{C}$ la représentation triviale de $\mathfrak{A}_5$.

(1) Montrer que $\mathfrak{A}_5$ admet cinq classes de conjugaisons, celles de Id, (123), (12)(34), (12345) et (12354).

On cherche tout d'abord les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$ qui sont contenues dans le sous-groupe $\mathfrak{A}_5$:

— $C_0 = \{Id\}$,
— $C_1 = \{g(1,2)(3,4)g^{-1}, g \in \mathfrak{S}_5\}$,
— $C_2 = \{g(1,2,3)g^{-1}, g \in \mathfrak{S}_5\}$,
— $C_3 = \{g(1,2,3,4,5)g^{-1}, g \in \mathfrak{S}_5\}$.

Calculons le cardinal de ces classes de conjugaison. On a $|C_i| = \frac{|\mathfrak{S}_5|}{|Stab_i|}$ avec les sous-groupes stabilisateurs :

— $Stab_1 = \{g \in \mathfrak{S}_5, g(1,2)(3,4)g^{-1} = (1,2)(3,4)\}$, de cardinal 8,
— $Stab_2 = \{g \in \mathfrak{S}_5, g(1,2,3)g^{-1} = (1,2,3)\}$, de cardinal 6,
— $Stab_3 = \{g \in \mathfrak{S}_5, g(1,2,3,4,5)g^{-1} = (1,2,3,4,5)\}$, de cardinal 5.

Donc $|C_1| = 15$, $|C_2| = 20$ et $|C_3| = 24$.

On considère maintenant les classes de conjugaison du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ suivantes :

— $C'_0 = \{Id\}$,
— $C'_1 = \{h(1,2)(3,4)h^{-1}, h \in \mathfrak{A}_5\} \subset C_1$,
— $C'_2 = \{h(1,2,3)h^{-1}, h \in \mathfrak{S}_5\} \subset C_2$,
— $C'_3 = \{b(1,2,3,4,5)h^{-1}, h \in \mathfrak{S}_5\} \subset C_3$.

Un calcul direct donne $|C'_1| = 15$, $|C'_2| = 20$ et $|C'_3| = 12$. Cela montre tout d'abord que $C_1 = C'_1$ et $C_2 = C'_2$. Pour la derniére classe de conjugaison on a $C_3 = C'_3 \cup C''_3$ avec $C''_3 = \{h(1,2,3,5,4)h^{-1}, h \in \mathfrak{A}_5\}$.

Conclusion : $\mathfrak{A}_5$ admet cinq classes de conjugaison

— celle de Id de cardinal 1,
— celle de $g_1 := (1,2,3)$ de cardinal 20,
— celle de $g_2 := (12)(3,4)$ de cardinal 15,
— celle de $g_3 := (1,2,3,4,5)$ de cardinal 12,
— celle de $g_4 := (1,2,3,5,4)$ de cardinal 12.

Dans la suite on va décrire les cinq représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_5$.

(2) Soit χ_2 le caractère de la représentation de dimension 4 donnée par la permutation des coordonnées de l'hyperplan $V_2 = \{\sum_{i=1}^5 x_i = 0\} \subset \mathbb{C}^5$. Calculer le caractère χ_2 et en déduire que V_2 est une représentation irréductible de $\mathfrak{A}_5$. *On pourra comparer le caractère χ_2 avec le caractère de la représentation standard $\mathbb{C}^5$.*

Comme $\mathbb{C}^5 = V_1 \oplus V_2$, on a $\chi_2 = \chi_{\mathbb{C}^5} - \chi_1$. Un calcul direct donne

— $\chi_2(Id) = 4$,
— $\chi_2(g_1) = 2 - 1 = 1$,
— $\chi_2(g_2) = 1 - 1 = 0$,
— $\chi_2(g_3) = 0 - 1 = -1$,
— $\chi_2(g_4) = 0 - 1 = -1$.

Alors on a

$$\langle \chi_2, \chi_2 \rangle = \frac{1}{60}\left(1 \cdot 4^2 + 20 \cdot (1)^2 + 15 \cdot (0)^2 + 12 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1)^2\right) = 1.$$

Cette identité permet de conclure que V_2 est une représentation irréductible de $\mathfrak{A}_5$.

(3) Soit $W \subset \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$ le sous-espace des polynômes homogènes de degré 2. Le groupe $\mathfrak{A}_5$ agit linéairement sur W par permutation des variables.

— Exhiber une base de W et calculer le caractère χ_W.

— Calculer les multiplicités des représentations irréductibles V_1 et V_2 dans W.

— Montrer que W possède une sous-représentation irréductible de dimension 5.

Une base de W est $\mathcal{B} := \{X_iX_j, 1 \leq i \leq j \leq 5\}$: il y a quinze vecteurs. Maintenant, comme l'action de $\mathfrak{A}_5$ permute les éléments de $\mathcal{B}$, on sait que pour tout $g \in \mathfrak{A}_5$, $\chi_W(g) = |\{v \in \mathcal{B},\ g \cdot v = v\}|$. Ainsi

— $\chi_W(Id) = 15$,
— $\chi_W(g_1) = 3$,
— $\chi_W(g_2) = 3$,
— $\chi_W(g_3) = 0$,
— $\chi_W(g_4) = 0$.

La multiplicité de la représentations irréductibles V_1 dans W est égal à

$$\langle \chi_1, \chi_W \rangle = \frac{1}{60}(15 + 20 \cdot 3 + 15 \cdot 3 + 12 \cdot 0 + 12 \cdot 0) = 2.$$

La multiplicité de la représentations irréductibles V_2 dans W est égal à

$$\langle \chi_2, \chi_W \rangle = \frac{1}{60}(15 \cdot 4 + 20 \cdot 3 + 15 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 12 \cdot 0) = 2.$$

Soit V_3 une sous représentation de W telle que $W \simeq 2V_1 \oplus 2V_2 \oplus V_3$. Le caractère χ_3 de V_3 vérifie $\chi_3 = \chi_W - 2\chi_1 - 2\chi_2$. On obtient

— $\chi_3(Id) = 5$,
— $\chi_3(g_1) = -1$,
— $\chi_3(g_2) = 1$,
— $\chi_3(g_3) = 0$,
— $\chi_3(g_4) = 0$.

On voit alors que $\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = 1$, ainsi V_3 est une représentation irréductible de $\mathfrak{A}_5$ de dimension 5.

(3) Quelle est la dimension des autres représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{A}_5$?

On vient d'exhiber trois représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_5$: V_1 de dimension 1, V_2 de dimension 4 et V_3 de dimension 5. Notons V_4 et V_5 les deux dernières représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_5$. La relation $\sum_{i=1}^{5}(\dim V_i)^2 = 60$ donne $(\dim V_4)^2 + (\dim V_5)^2 = 18$. Cette dernière égalité impose que $\dim V_4 = \dim V_5 = 3$.