Examen Session 1
"Algèbre 1 - HAX708X"

---

11 janvier 2024

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 3h00

Questions isolées *(6 points)*

a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'anneau quotient $\mathbb{Z}[i]/(n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$. Est-ce que 11 est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$?

b. Soient $a, b \geq 1$: on note $a \wedge b$ leur pgcd. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z}$.

c. À isomorphisme près, combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 400 ? En donner la liste.

d. Établir la table des caractères du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 1 *(5 points)*

On considère le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (pour l'addition).

(1) Déterminer la torsion du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(2) Montrer que si p et q sont deux entiers premiers entre eux, le sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ engendré par la classe de $\frac{p}{q}$ est égal au sous-groupe engendré par la classe de $\frac{1}{q}$.

(3) En déduire que, pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un unique sous-groupe cyclique de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ d'ordre n.

(4) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de type fini, i.e. engendré par un nombre fini d'éléments, est cyclique.

(5) Pour $n \geq 1$, combien y a-t-il de sous-groupes d'ordre n dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$?

Exercice 2 *(4 points)*

Soit A un anneau principal et M un A-module de type fini. D'après le théorème de classification, il existe $m_1, \dots, m_s \in M$ tels que $M = \oplus_{k=1}^{s} A m_k$ et $\mathrm{Ann}(m_1) \supset \cdots \supset \mathrm{Ann}(m_s)$.

(1) Soit $i \in \{1, \dots, s\}$. Montrer qu'il existe $u_i \in \mathrm{End}_A(M)$ tel que $u_i(m_k) = \delta_{ks} m_i, \forall k \in \{1, \dots, s\}$.

(2) Soit $u \in \mathrm{End}_A(M)$ qui commute avec tous les éléments de $\mathrm{End}_A(M)$. Montrer que u est la multiplication par un scalaire $a \in A$.

(3) Même question en supposant seulement que $u : M \to M$ est un morphisme de groupe additif qui commute avec tous les éléments de $\mathrm{End}_A(M)$.

(4) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. A chaque sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$, on associe son commutant

$$C(\mathcal{X}) = \{u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E); u \circ f = f \circ u, \forall f \in \mathcal{X}\}.$$

Montrer que pour tout $v \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ on a la relation $C(C(\{v\})) = \mathbb{K}[v]$.

Exercice 3 *(7 points)*

Soit $\mathfrak{A}_5 \subset \mathfrak{S}_5$ le groupe alterné. On note $V_1 = \mathbb{C}$ la représentation triviale de $\mathfrak{A}_5$.

(1) Montrer que $\mathfrak{A}_5$ admet cinq classes de conjugaisons, celles de Id, (123), (12)(34), (12345) et (12354).

(2) Soit χ_2 le caractère de la représentation de dimension 4 donnée par la permutation des coordonnées de l'hyperplan $V_2 = \{\sum_{i=1}^{5} x_i = 0\} \subset \mathbb{C}^5$. Calculer le caractère χ_2 et en déduire que V_2 est une représentation irréductible de $\mathfrak{A}_5$. *On pourra comparer le caractère χ_2 avec le caractère de la représentation standard $\mathbb{C}^5$.*

(3) Soit $W \subset \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$ le sous-espace des polynômes homogènes de degré 2. Le groupe $\mathfrak{A}_5$ agit linéairement sur W par permutation des variables.

— Exhiber une base de W et calculer le caractère χ_W.

— Calculer les multiplicités des représentations irréductibles V_1 et V_2 dans W.

— Montrer que W possède une sous-représentation irréductible de dimension 5.

(4) Quelle est la dimension des autres représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{A}_5$?