CONTRÔLE CONTINU
"ALGÈBRE 1 - HAX708X"

20 DÉCEMBRE 2023

Questions isolées

a. Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. Montrer que pour tout A-module M, le produit tensoriel $M \otimes_A A/I$ est isomorphe à M/IM.

L'application $\phi : M \times A/I \to M/IM$, définie par la relation $\phi(m, a+I) = am + IM$, est A-bilinéaire. Elle se factorise donc en un morphisme $\bar{\phi} : M \otimes_A A/I \to M/IM$. On considère maintenant le morphisme $\psi : M \to M \otimes_A A/I$, $\psi(m) := m \otimes \bar{1}$. Si $a \in I$, on a $\psi(am) = (am) \otimes \bar{1} = m \otimes \bar{a} = 0$. Ainsi $IM \subset \ker(\psi)$ et donc ψ induit un morphisme $\bar{\psi} : M/IM \to M \otimes_A A/I$. On vérifie maintenant aisément que $\bar{\phi} \circ \bar{\psi} = Id$ et $\bar{\psi} \circ \bar{\phi} = Id$. On a ainsi répondu à la question.

b. Soit E et F des espaces vectoriels de dimension fini sur un corps $\mathbb{K}$. Décrire un isomophisme entre les deux espaces vectoriels $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ et $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$.

Soient $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_j)_{j \in J}$ des bases respectives des espaces vectoriels E et F. Pour tout $(i, j) \in I \times J$, on note $E_{i,j} \in \hom_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'application linéaire définie par les relations $E_{i,j}(e_k) = \delta_{ik} f_j$. On constate que $\{E_{i,j},\ (i, j) \in I \times J\}$ est une base de $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$. Maintenant on considère l'unique application linéaire $T : E \otimes_{\mathbb{K}} F \to \hom_{\mathbb{K}}(E, F)$ satisfaisant $T(e_i \otimes f_j) = E_{i,j}$. Comme T envoie une base de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ sur une base de $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$, T est un isomorphisme.

c. À un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, on associe l'endomorphisme $D_u : \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$ défini par la relation $D_u(x \otimes y) = u(x) \otimes u(y)$. Montrer les équivalences

(1) u nilpotent $\iff$ D_u nilpotent.

On vérifie tout d'abord que $D_u = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Comme $\forall k \geq 1, (D_u)^k = D_{u^k}$, la remarque précédente permet de conclure que u est nilpotent si et seulement si D_u est nilpotent.

(2) u diagonalisable $\iff$ D_u diagonalisable.

Supposons que u soit diagonalisable : soit (e_i) une base de $\mathbb{C}^n$ telle que $\forall j, \exists \lambda_j \in \mathbb{C}, u(e_j) = \lambda_j e_j$. Dans ce cas, $e_i \otimes e_j$ est une base de $\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$ pour laquelle $D_u(e_i \otimes e_j) = \lambda_i \lambda_j e_i \otimes e_j$. On a ainsi montré que D_u est diagonalisable.

D'après le décomposition de Dunford, tout endomorphisme $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ admet une décomposition $u = d + n$, avec d diagonalisable, n nilpotent et $dn = nd$. Alors $D_u = D_d + N$ avec $N : \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$ défini par la relation $N(x \otimes y) = d(x) \otimes n(y) + n(x) \otimes d(y) + n(x) \otimes n(y)$. On vérifie sans peine que N est nilpotent et commute avec D_d. Ainsi, D_u est diagonalisable si et seulement si $N = 0$. On vérifie ensuite que $N = 0$ si et seulement si $n = 0$.

d. Déterminer les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$.

Il y a celles de Id, (12), (123), (1234), (12345), (12)(34) et (12)(345).

e. Soit G un groupe fini. Notons $\mathcal{Z}[G]$ le centre de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$. Montrer que $\mathcal{Z}[G]$ est un sous-espace vectoriel dont on déterminera une base.

Une fonction $f \in \mathbb{C}[G]$ appartient à $\mathcal{Z}[G]$ si et seulement si

(1) $$f \star \delta_g = \delta_g \star f, \quad \forall g \in G.$$

On voit immédiatement que si f_1, f_2 vérifient (1), alors $\lambda f_1 + \mu f_2$ vérifie encore (1) pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$: ainsi $\mathcal{Z}[G]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[G]$.

La relation (1) signifie que $f(gxg^{-1}) = f(x)$ pour tout $x, g \in G$, c'est à dire, la fonction f est constante sur les classes de conjugaison de G. On voit donc qu'une base de $\mathcal{Z}[G]$ est formée des fonctions caractéristiques 1_C des classes de conjugaison $C \subset G$.

f. Soit (V, ρ) une représentation complexe d'un groupe fini G, et χ_V son caractère. Montrer que $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$, $\forall g \in G$.

Soit N le cardinal de G et n la dimension de V. Alors $\rho(g)^N = Id_V$ pour tout $g \in G$. Cette relation permet de voir que tous les endomorphismes $\rho(g)$ sont diagonalisables avec des valeurs propres $\lambda_1(g), \cdots, \lambda_n(g)$ de module 1. Ainsi

$$\chi_V(g^{-1}) = Tr(\rho(g)^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i(g)} = \overline{\chi_V(g)}.$$

Exercice

On considère le groupe $G \subset GL_2(\mathbb{R})$ engendré par la rotation R d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la symétrie S définie par $S(x, y) = (x, -y)$.

(1) Montrer que le groupe G possède 12 éléments.

Les éléments R, S satisfont les relations : $S^2 = Id$, $R^6 = Id$ et $SRS = R^{-1}$. Alors

$$G = \{R^k, 0 \leq k \leq 5\} \cup \{SR^k, 0 \leq k \leq 5\}$$

possède 12 éléments.

(2) Décrire les classes de conjugaison du groupe G.

Voici les classes de conjugaison de G : $\{Id\}$, $\{R, R^5\}$, $\{R^2, R^4\}$, $\{R^3 = -Id\}$, $\{S, SR^2, SR^4\}$ et $\{SR, SR^3, SR^5\}$.

(3) Montrer que G possède 4 représentations irréductibles complexes de dimension 1.

On cherche des morphismes de groupes $\phi : G \to \mathbb{C}^*$. Les nombres complexes $s = \Phi(S)$ et $r = \Phi(R)$ doivent vérifier $s^2 = 1$, $r^6 = 1$ et $srs = r^{-1}$, donc $s, r \in \{\pm 1\}$. Réciproquement, pour chaque $a, b \in \{\pm 1\}$, il existe un unique morphisme de groupe $\phi_{a,b} : G \to \mathbb{C}^*$ tel que $a = \Phi_{a,b}(S)$ et $b = \Phi_{a,b}(R)$. On a bien montré que G possède 4 représentations irréductibles complexes de dimension 1.

(4) Montrer que G possède 2 représentations irréductibles complexes de dimension 2.

Comme G possède 6 classes de conjugaison, il possède 6 représentations irréductibles (à isomoprhisme près) : $V_1, \ldots, V_6$ où les quatre premières sont de dimension 1. Sachant que le cardinal de G, 12, est égal à $\sum_{i=1}^{6} (\dim V_i)^2 = 4 + (\dim V_5)^2 + (\dim V_6)^2$, on a forcément $\dim V_5 = \dim V_6 = 2$.

On peut décrire les représentations V_5 et V_6 comme suit.

— $V_5 = \mathbb{C}^2$ est la représentation canonique. Le morphisme $\rho_5 : G \to GL_2(\mathbb{C})$ satisfait

$$\rho_5(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho_5(R) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

— V_6 est égal au produit tensoriel de V_5 avec le caractère $\Phi_{1,-1}$. Le morphisme $\rho_6 : G \to GL_2(\mathbb{C})$ satisfait

$$\rho_6(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho_6(R) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$